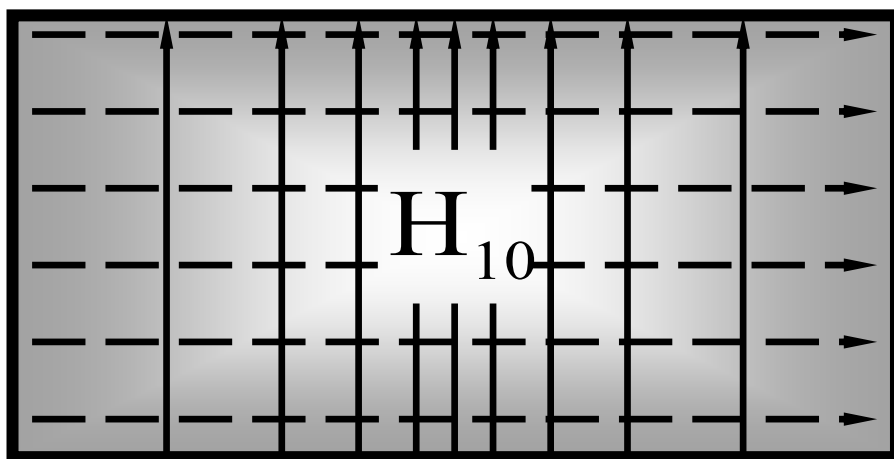
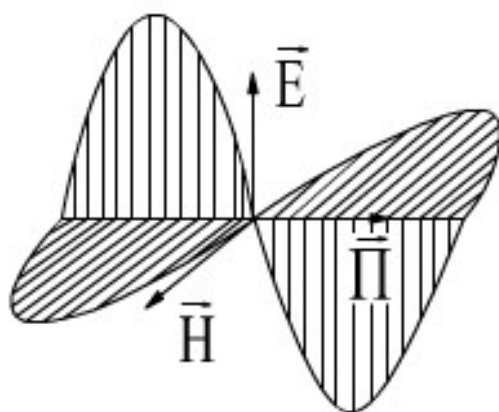


А.Н. КОВАЛЕНКО

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ



МОСКВА 2014

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ»
МГТУ МИРЭА

А.Н. КОВАЛЕНКО

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Учебное пособие

МОСКВА 2014

ББК 22.313
К56
УДК 537.86

Рецензенты: д.ф.-м.н., проф. В.А.Пермяков
к.т.н., доц. В.В. Чистюхин

К 56 А.Н.Коваленко. Основы электродинамики. Учебное пособие/
Московский государственный университет радиотехники,
электроники и автоматики. - М..2014, - 150с.

ISBN 5-7339-0187-х

Рассматриваются: основные уравнения и положения электродинамики, возбуждение электромагнитных волн в свободном пространстве, основные принципы в теории электромагнитного поля, волновые явления на границах раздела сред. С общих позиций излагается теория металлических волноводов и волноводных резонаторов.

Учебное пособие предназначено для студентов по специальности 210601.65 «Радиоэлектронные устройства» и по направлениям 210400.62 «Радиотехника», 010400.62 «Прикладная математика и информатика»

Табл. нет. Ил. 38. Библиогр.- 17 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета университета

© А.Н. Коваленко, 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие охватывает первую часть курса дисциплины «Электродинамика и распространение радиоволн». Оно содержит основные разделы, соответствующие Государственному стандарту по специальности 210601.65 «Радиоэлектронные системы и комплексы» и по подготовке бакалавров по направлению 210400.62 «Радиотехника». Пособие также может быть использовано по подготовке бакалавров по направлению 010400.62 «Прикладная математика и информатика» и обучающимися в магистратуре по направлению «Радиотехника» и по направлению «Прикладная математика и информатика». Учебное пособие написано на основе лекций, читаемых автором в Московском государственном техническом университете радиотехники, электроники и автоматики (МГТУ МИРЭА).

Математический аппарат соответствует программе вузовского курса высшей математики.

В пособии изучаются электромагнитные явления, происходящие в свободном пространстве, на границах раздела сред, в волноводах и в резонаторах. Теоретической базой, используемой при изучении электромагнитных явлений, является система уравнений Максвелла и ряд основных принципов теории электромагнитного поля, изучаемых в пособии. Считается, что электромагнитное поле создаётся, или возбуждается заданными источниками – сторонними токами. Характеристики электромагнитного поля в задачах возбуждения определяются из решения неоднородных уравнений электродинамики, удовлетворяющего всем условиям теоремы единственности.

При изучении конкретного электромагнитного явления вначале формулируется постановка электродинамической задачи, имеющей единственное решение. Затем проводится математическое решение задачи. При этом подробный вывод отдельных формул может быть вынесен на практические занятия. В заключение даётся анализ математического решения задачи и физическое осмысление полученных результатов.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1.1. Характеристики электромагнитного поля. Электрические заряды и токи

Электромагнитное поле можно описать четырьмя векторными функциями, зависящими от пространственных координат, или от радиуса-вектора \vec{r} , проведенного из начала координат в произвольную точку пространства, и времени t . Эти функции являются основными характеристикам электромагнитного поля и называются:

- 1) напряженность электрического поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$,
- 2) индукция электрического поля $\vec{D}(\vec{r}, t)$,
- 3) напряженность магнитного поля $\vec{H}(\vec{r}, t)$,
- 4) индукция магнитного поля $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

Источниками электромагнитного поля являются электрические заряды и токи.

Понятия характеристик электромагнитного поля, зарядов и токов раскрываются при изучении общего курса физики.

Распределение электрических зарядов в пространстве характеризуется объемной плотностью заряда ρ :

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}, \quad (1.1)$$

где ΔQ - величина заряда в объеме ΔV .

Полный заряд Q в области V определяется выражением:

$$Q = \int_V \rho \, dv, \quad (1.2)$$

Распределение электрических токов в пространстве характеризуется объемной плотностью тока \vec{j} :

$$\vec{j} = \vec{i}^0 \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta s}, \quad (1.3)$$

где \vec{i}^0 - единичный вектор, указывающий направление движения электрических зарядов, ΔI - величина тока, проходящего через площадку Δs , перпендикулярную вектору \vec{i}^0 .

Полный ток I , проходящий через произвольную поверхность S в проводящем теле, определяется выражением:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{s} = \int_S \vec{j} \vec{v}^0 ds = \int_S j_v ds, \quad (1.4)$$

где $d\vec{s} = \vec{v}^0 ds$, \vec{v}^0 - единичный вектор нормали в каждой точке поверхности S , скалярное произведение векторов $\vec{j} \vec{v}^0 = j_v$ представляет собой нормальную составляющую плотности тока.

В международной системе единиц СИ характеристики электромагнитного поля, заряды и токи имеют следующие размерности:

$[\vec{E}] = \text{В/м}$ (Вольт на метр); $[\vec{D}] = \text{Кл/м}^2$ (Кулон на квадратный метр);

$[\vec{H}] = \text{А/м}$ (Ампер на метр); $[\vec{B}] = \text{Т}$ (Тесла)

$[Q] = \text{Кл}$ (Кулон); $[\rho] = \text{Кл/м}^3$ (Кулон на кубический метр);

$[I] = \text{А}$ (Ампер); $[\vec{j}] = \text{А/м}^2$ (Ампер на квадратный метр).

В электромагнитном поле на заряд действует сила, определяемая векторами напряженности электрического поля \vec{E} и индукции магнитного поля \vec{B} . В вакууме эти векторы связаны с векторами индукции электрического поля \vec{D} и напряженности магнитного поля \vec{H} соотношениями:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H},$$

где $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ - электрическая постоянная, имеющая размерность Ф/м (Фарада на метр);

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ - магнитная постоянная, имеющая размерность Гн/м (Генри на метр).

Через эти две важнейшие электродинамические константы выражается третья - скорость света в вакууме c :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

1.2. Уравнения Максвелла

Характеристики электромагнитного поля, плотность тока и плотность заряда связаны между собой системой уравнений Максвелла в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} 1. \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, & 3. \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ 2. \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & 4. \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Входящие в систему дифференциальные операторы div (дивергенция) и rot (ротор) являются пространственными (объемными) производными, которые определяются следующим образом:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{a} \cdot \vec{ds}}{\Delta V}, \quad \operatorname{rot} \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{-\oint_{\Delta S} [\vec{a} \cdot \vec{ds}]}{\Delta V}, \quad (1.7)$$

где $\oint_{\Delta S} \vec{a} \cdot \vec{ds}$ - скалярный, а $\oint_{\Delta S} [\vec{a} \cdot \vec{ds}]$ - векторный потоки вектора \vec{a} через поверхность ΔS , ограничивающую область ΔV . В декартовых координатах (x, y, z) дивергенция и ротор вычисляются по следующим формулам:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div}(\vec{x}^\circ a_x + \vec{y}^\circ a_y + \vec{z}^\circ a_z) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (1.8a)$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{x}^\circ \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{y}^\circ \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{z}^\circ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right), \quad (1.8б)$$

где $\vec{x}^\circ, \vec{y}^\circ, \vec{z}^\circ$ - единичные векторы, параллельные осям x, y, z.

Заметим, что при решении электродинамических задач используют ту или иную систему координат, а уравнения Максвелла расписывают в координатной форме. Так, например, первое векторное уравнение Максвелла в декартовой системе координат представляется в виде:

$$\begin{aligned} & \vec{x}^\circ \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{y}^\circ \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{z}^\circ \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \\ & = \vec{x}^\circ \left(\frac{\partial D_x}{\partial t} + j_x \right) + \vec{y}^\circ \left(\frac{\partial D_y}{\partial t} + j_y \right) + \vec{z}^\circ \left(\frac{\partial D_z}{\partial t} + j_z \right), \end{aligned}$$

которое эквивалентно системе трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{\partial D_x}{\partial t} + j_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{\partial D_y}{\partial t} + j_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{\partial D_z}{\partial t} + j_z. \end{aligned}$$

Уравнения Максвелла можно представить и в интегральной форме. Для этого обе части 1-го и 2-го уравнений (1.6) умножим на $d\vec{S}$ и проинтегрируем по произвольной поверхности S , ограниченной контуром L . Применим к интегралам в левых частях теорему Стокса:

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{a} d\vec{s}, \quad (1.9a)$$

где $d\vec{l} = \vec{\tau}^\circ dl$; $d\vec{s} = \vec{v}^\circ ds$; $\vec{\tau}^\circ$ - единичный вектор, касательный к контуру L , \vec{v}° - единичный вектор нормали к поверхности S . При интегрировании обход контура L происходит против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \vec{v}° .

В результате получим 1-ое и 2-ое уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$1. \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I^{CM} + I; \quad 2. \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} d\vec{s}, \quad (1.9)$$

где

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{s}, \quad I^{CM} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{s}$$

По определению величина I^{CM} называется током смещения, а величина $\vec{j}^{CM} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ - объемной плотностью тока смещения.

Интегрируя обе части 3-го и 4-го уравнений Максвелла по произвольной области V , ограниченной поверхностью S , и применяя к интегралам в левой части теорему Остроградского-Гаусса

$$\int_V \text{div} \vec{a} dv = \oint_S \vec{a} d\vec{s}, \quad (1.10a)$$

получим 3-е и 4-е уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$3. \oint_S \vec{D} d\vec{s} = Q, \quad 4. \oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0, \quad (1.10)$$

где $Q = \int_V \rho dv$.

1.3. Основные законы электромагнетизма, выражаемые уравнениями Максвелла

Первое уравнение Максвелла является обобщением закона Ампера и выражает закон полного тока, из которого следует, что переменное во времени магнитное поле может создаваться как токами проводимости, так и токами смещения. Отсюда следует, что переменное электрическое поле ($\frac{d\vec{D}}{dt} \neq 0$) создает переменное магнитное поле. Этот вывод принадлежит Максвеллу.

Второе уравнение Максвелла является обобщением закона электромагнитной индукции Фарадея, который следует из (1.9), если в качестве контура L взять проводящий контур $L_{пр}$. Из второго уравнения Максвелла также следует, что переменное магнитное поле ($\frac{d\vec{B}}{dt} \neq 0$) создает переменное электрическое поле.

Третье уравнение Максвелла является обобщением закона Гаусса на переменное электрическое поле.

Четвертое уравнение Максвелла отражает тот факт, что в природе нет магнитных зарядов, и силовые линии магнитного поля непрерывны.

Силовыми линиями векторного поля называются линии, которые в каждой точке пространства касаются характеризующего их вектора. При этом густота силовых линий определяет величину поля.

1.4 Уравнение непрерывности и закон сохранения заряда

Возьмем дивергенцию от обеих частей первого уравнения (1.6). Учитывая, что $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0$, получаем:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) = 0. \quad (1.11)$$

Это уравнение называется уравнением непрерывности. Оно отражает тот факт, что силовые линии вектора $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right)$, представляющего сумму плотностей токов смещения и проводимости, непрерывны.

Перепишем уравнение (1.11) в виде $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}) = 0$. Используя третье уравнение Максвелла из (1.6), получаем:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.12)$$

Это уравнение выражает закон сохранения заряда в дифференциальной форме.

Интегрируя уравнение (1.12) по произвольной области V и принимая во внимание, что $\int_V \operatorname{div} \vec{j} dv = \oint_S \vec{j} \vec{ds} = I$, получим соотношение

$$\frac{dQ}{dt} = -I, \quad (1.13)$$

которое выражает закон сохранения заряда в интегральной форме: величина заряда в области V может измениться только за счет его вытекания из этой области, или за счет его притока извне. При отсутствии движения зарядов ($I = 0$) величина заряда в области V остается постоянной.

1.5. Материальные уравнения и классификация сред

Система уравнений Максвелла (1.6) в математическом смысле не является полной. Первое и второе уравнения этой системы включают пять неизвестных функций. Неполнота системы (1.6) объясняется ее универсальностью: уравнения Максвелла описывают электромагнитные процессы в любых средах, в то время как параметры, характеризующие среду, в них отсутствуют.

В зависимости от вида среды существует функциональная связь между векторами \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} , \vec{j} и \vec{E} , описываемая материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{E}).$$

В общем случае для произвольной среды материальные уравнения можно записать в следующем виде:

$$\vec{D} = (\varepsilon_a) \vec{E}, \quad \vec{B} = (\mu_a) \vec{H}, \quad \vec{j} = (\sigma) \vec{E}, \quad (1.14)$$

где (ε_a) , (μ_a) , (σ) - квадратные матрицы третьего порядка (тензоры). Элементы этих матриц представляют собой параметры, характеризующие произвольную среду. Материальное уравнение $\vec{D} = (\varepsilon_a) \vec{E}$ - в координатной форме записывается в виде:

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{axx} E_x + \varepsilon_{axy} E_y + \varepsilon_{axz} E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{ayx} E_x + \varepsilon_{ayy} E_y + \varepsilon_{ayz} E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{azx} E_x + \varepsilon_{azy} E_y + \varepsilon_{azz} E_z, \end{aligned}$$

где тензор диэлектрической проницаемости (ε_a) имеет вид:

$$(\varepsilon_a) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{axx} & \varepsilon_{axy} & \varepsilon_{axz} \\ \varepsilon_{ayx} & \varepsilon_{ayy} & \varepsilon_{ayz} \\ \varepsilon_{azx} & \varepsilon_{azy} & \varepsilon_{azz} \end{pmatrix}.$$

Аналогично записываются и два другие материальные уравнения $\vec{B} = (\mu_a) \vec{H}$, $\vec{j} = (\sigma) \vec{E}$ и тензоры (μ_a) и (σ) .

Таким образом, произвольная среда может быть описана 27 параметрами.

Если все параметры среды не зависят от векторов поля, то такая среда называется линейной. Если хотя бы один из параметров зависит от векторов поля, то среда называется нелинейной.

Если все параметры среды не зависят от координат, то такая среда называется однородной. Если хотя бы один из параметров зависит от координат, то среда называется неоднородной.

Среда, свойства которой не зависят от направления в пространстве, называется изотропной средой. В изотропной среде вектор \vec{D} параллелен вектору \vec{E} , вектор \vec{B} параллелен вектору \vec{H} , а вектор \vec{j} параллелен вектору \vec{E} .

Для анизотропной среды нарушается условие параллельности векторов \vec{D} и \vec{E} , или \vec{B} и \vec{H} , или \vec{j} и \vec{E} .

Для изотропной линейной среды материальные уравнения записываются в виде:

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.14a)$$

где $\varepsilon_a, \mu_a, \sigma$ - скалярные величины, не зависящие от векторов поля.

Таким образом, изотропная линейная среда характеризуется только тремя параметрами:

ε_a - абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, имеющая размерность Ф/м (Фарада на метр); μ_a - абсолютная магнитная проницаемость среды, имеющая размерность Гн/м (Генри на метр);

σ - удельная проводимость среды, имеющая размерность $1/(\text{Ом} \cdot \text{м}) = \text{См/м}$ (Сименс на метр).

Часто среды характеризуют относительными проницаемостями, сопоставляя их абсолютные проницаемости с проницаемостями вакуума:

$\varepsilon = \varepsilon_a / \varepsilon_0$ - относительная диэлектрическая проницаемость среды;

$\mu = \mu_a / \mu_0$ - относительная магнитная проницаемость среды.

В зависимости от величины σ среды делят на проводники, диэлектрики и среды, занимающие промежуточное положение между проводниками и диэлектриками.

Среда, у которой $\sigma = 0$, называется идеальным диэлектриком, а среда, у которой $\sigma = \infty$, называется идеальным проводником.

В идеальном проводнике могут существовать только токи проводимости с плотностью $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. При этом напряженность электрического поля в идеальном проводнике равна нулю. Поэтому в идеальном проводнике отсутствуют токи смещения:

$$\vec{j}^{CM} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

В идеальном диэлектрике, наоборот, могут существовать лишь токи смещения, а токи проводимости отсутствуют.

В реальных средах могут существовать как токи проводимости, так и токи смещения. Если в среде преобладают токи проводимости, то ее относят к проводнику, а если преобладают токи смещения, то к диэлектрику.

Рассмотрим электромагнитное поле в линейной изотропной среде, вектор напряжённости электрического поля которого в каждой точке среды изменяется по закону гармонических колебаний:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m(\vec{r}) \cdot \cos[\omega \cdot t + \varphi(\vec{r})], \quad (1.15)$$

где $\omega = 2\pi f$ - круговая частота колебаний.

Определим плотности тока проводимости \vec{j} и тока смещения \vec{j}^{CM} :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \sigma \vec{E} = \sigma \vec{E}_m \cos(\omega t + \varphi), \\ \vec{j}^{CM} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\varepsilon_a \omega \vec{E}_m \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Рассмотрим отношение амплитуд этих токов, которое называют тангенсом угла диэлектрических потерь $tg\delta$:

$$\frac{j_m}{j_m^{CM}} = \frac{\sigma}{\omega \cdot \varepsilon_a} = tg\delta. \quad (1.16)$$

При $tg\delta \ll 1$ среду относят к диэлектрику, а при $tg\delta \gg 1$ - к проводнику.

Для металлических проводников, у которых $\sigma \sim 10^7$ [См/м], во всем диапазоне радиочастот $\operatorname{tg} \delta \gg 1$. Поэтому все металлы являются хорошими проводниками.

Электропроводность материалов, используемых в радиотехнике в качестве диэлектриков, имеет порядок $(10^{-16} \div 10^{-8})$ [См/м]. Для этих сред $\operatorname{tg} \delta \ll 1$.

Среды, у которых на низких частотах $\operatorname{tg} \delta \gg 1$, а на высоких $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ (например, почва земли), относят к средам, занимающим промежуточное положение между проводниками и диэлектриками.

1.6. Полная система уравнений электродинамики

Уравнения Максвелла (1.6) и материальные уравнения (1.14) образуют полную систему уравнений электродинамики. В этой системе под векторной функцией \vec{j} понимается плотность тока проводимости, возникающего в проводящей среде под действием электрического поля. Однако при решении электродинамических задач обычно выделяют некоторую область пространства V' , в каждой точке которой плотность тока можно считать не зависящей от поля и являющейся заданной функцией координат и времени. При этом электрический ток в области V' рассматривают как первопричину возникновения поля. Этот ток называют сторонним током, создающим или возбуждающим электромагнитное поле.

Распределение стороннего тока в области характеризуется объемной плотностью стороннего тока \vec{j}^{cm} . При этом плотность тока проводимости \vec{j} во всей рассматриваемой области представляется в виде:

$$\vec{j} = \begin{cases} \vec{j}^{cm} & \text{в области } V' \\ \sigma \vec{E} & \text{вне области } V' \end{cases}$$

или
$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \vec{j}^{cm}. \quad (1.17)$$

С введением сторонних токов полную систему уравнений электродинамики для линейной изотропной среды можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
1.) \quad \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{j}^{cm} \\
2.) \quad \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad , \\
3.) \quad \operatorname{div} \varepsilon_a \vec{E} &= \rho \quad , \\
4.) \quad \operatorname{div} \mu_a \vec{H} &= 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{1.18}$$

1.7. Граничные условия электродинамики

Уравнения электродинамики (1.18) являются дифференциальными уравнениями в частных производных, которые имеют бесконечное множество решений.

Любая физически реализуемая электродинамическая задача имеет единственное решение, которое получается из решения системы (1.18) при наложении некоторых дополнительных условий. Эти условия называются граничными условиями электродинамики.

Если параметры среды ε, μ, σ являются непрерывными функциями координат во всем бесконечном пространстве, то для единственности решения уравнений электродинамики необходимо наложить только граничное условие на бесконечности.

Если же параметры среды терпят разрыв на некоторых поверхностях, например, на границе раздела двух разнородных сред, то уравнения электродинамики нужно рассматривать в каждой среде, параметры которой непрерывны, а на границе раздела задавать граничные условия, определяющие поведение векторов поля на границах раздела сред.

Таким образом, граничные условия электродинамики это некоторые математические соотношения связи для векторов поля на границе раздела двух сред.

Представим векторы поля на границе раздела сред в виде разложения на нормальную $\vec{v}^\circ a_v$ и тангенциальную \vec{a}_τ составляющие: $\vec{a} = \vec{v}^\circ a_v + \vec{a}_\tau$, где \vec{a} - любой из векторов, характеризующих поле; \vec{v}° - единичный вектор нормали к

касательной плоскости P в произвольной точке O граничной поверхности S , направленный из области Π в область I (рис. 1.1).

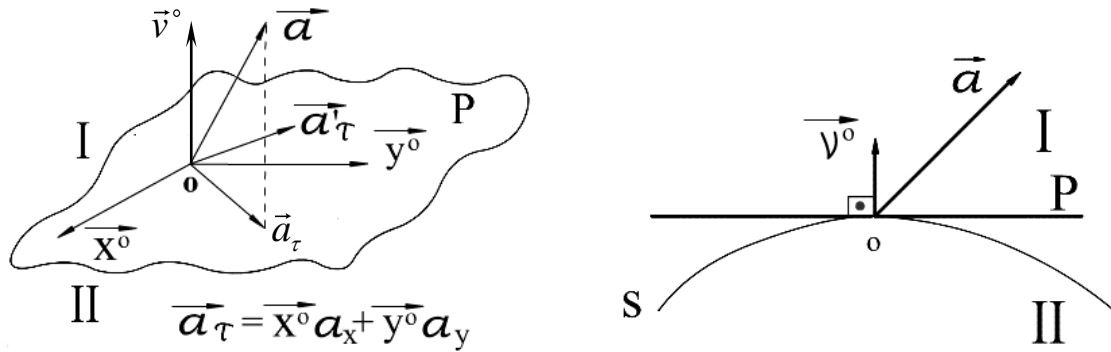


Рис. 1.1 Представление вектора поля на границе раздела сред

Скалярное произведение вектора \vec{a} на единичную нормаль \vec{v}^0 определяет нормальную составляющую вектора \vec{a} : $\vec{v}^0 \vec{a} = a_v$.

Векторное произведение вектора \vec{a} на единичную нормаль \vec{v}^0 определяет тангенциальную составляющую вектора \vec{a} :

$$[\vec{v}^0 \vec{a}] = [\vec{v}^0 \vec{a}_\tau] = \vec{a}'_\tau, \text{ где } a'_\tau = a_\tau, \vec{a}'_\tau \perp \vec{a}_\tau.$$

Векторную функцию \vec{a} на границе раздела сред при подходе к границе со стороны области I обозначим через \vec{a}_1 , а при подходе со стороны области Π - через \vec{a}_2 .

Используя уравнения Максвелла в интегральной форме (1.9) и (1.10), можно получить следующие соотношения связи для векторов поля в произвольной точке O граничной поверхности S :

Из третьего уравнения Максвелла (1.10) -

$$1. \quad \vec{v}^0 \vec{D}_1 - \vec{v}^0 \vec{D}_2 = \xi, \quad (1.19)$$

где $\xi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S}$ - поверхностная плотность электрического заряда в точке O ;

ΔS - площадка, содержащая точку O ;

ΔQ - величина заряда на площадке ΔS .

Из четвертого уравнения Максвелла (1.10) -

$$2. \quad \vec{v}^0 \vec{B}_1 - \vec{v}^0 \vec{B}_2 = 0, \quad (1.20)$$

Из второго уравнения Максвелла (1.9) -

$$3. \quad \left[\vec{v}^\circ \vec{E}_1 \right] - \left[\vec{v}^\circ \vec{E}_2 \right] = 0 \quad (1.21)$$

Из первого уравнения Максвелла (1.9) -

$$4. \quad \left[\vec{v}^\circ \vec{H}_1 \right] - \left[\vec{v}^\circ \vec{H}_2 \right] = \vec{\eta}, \quad (1.22)$$

где $\vec{\eta} = \vec{i}^\circ \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l}$ поверхностная плотность электрического тока;

\vec{i}° - единичный вектор, указывающий направление движения электрических зарядов в точке О;

Δl - отрезок, перпендикулярный вектору \vec{i}° ;

ΔI - величина тока, пересекающего отрезок Δl .

Формулировка граничных условий

1. Нормальная составляющая вектора электрической индукции на границе раздела сред терпит разрыв, равный поверхностной плотности электрического заряда.

При отсутствии поверхностных зарядов нормальная составляющая вектора электрической индукции непрерывна: $D_{1\nu} = D_{2\nu}$.

2. Нормальная составляющая вектора магнитной индукции на границе раздела сред всегда непрерывна: $B_{1\nu} = B_{2\nu}$. Этот факт связан с тем, что в природе не существует свободных магнитных зарядов.

3. Тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на границе раздела сред всегда непрерывна: $E_{1\tau} = E_{2\tau}$.

4. Тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля на границе раздела сред терпит разрыв, величина которого определяется поверхностной плотностью электрического тока (рис. 1.2).

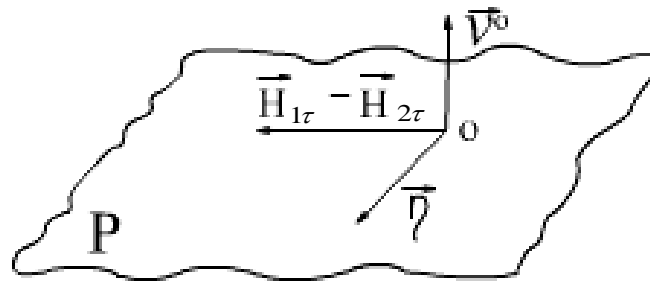


Рис. 1.2. Связь \vec{H}_τ и \vec{n} на границе раздела сред

При отсутствии поверхностных токов тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля на границе раздела сред непрерывна: $\vec{H}_{1\tau} = \vec{H}_{2\tau}$. Заметим, что поверхностные токи могут быть только на поверхности идеального проводника.

Граничные условия на поверхности идеального проводника.

Из уравнений Максвелла следует, что все характеристики изменяющегося с течением времени электромагнитного поля в идеальном проводнике равны нулю.

Действительно, из третьего уравнения (1.14 а) $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ следует, что при $\sigma = \infty$ напряженность электрического поля в проводнике $\vec{E} = 0$.

Из второго уравнения системы (1.6) следует, что $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$.

Отсюда для переменного во времени поля находим, что и $\vec{B} = 0$.

Далее, из первого и второго уравнений (1.14а) следует, что $\vec{D} = 0$ и $\vec{H} = 0$.

Полагая в общих граничных условиях характеристики поля в области Π равными нулю, получим граничные условия на поверхности идеального проводника:

$$1. D_\nu = \xi; 2. B_\nu = 0; 3. \vec{E}_\tau = 0; 4. [\vec{v}^\circ \vec{H}] = \vec{\eta}. \quad (1.23)$$

Таким образом, на поверхности идеального проводника тангенциальные составляющие напряженности и индукции

электрического поля и нормальные составляющие индукции и напряженности магнитного поля равны нулю.

При исследовании электромагнитных полей вблизи металлических тел, удельная проводимость которых $\sigma \sim 10^7$ [См/м], с высокой степенью точности можно считать металлическое тело идеальным проводником и на его поверхности использовать граничные условия (1.23).

1.8. Теорема Пойнтинга

Рассмотрим произвольную область V , ограниченную поверхностью S , в которой могут находиться источники поля, характеризуемые объемной плотностью тока \vec{j}^{cm} (рис.1.3).

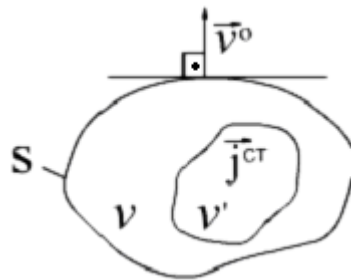


Рис.1.3. Сторонние источники в произвольной области

Из уравнений электродинамики (1.18) может быть получена основная теорема теории электромагнитного поля - теорема Пойнтинга, выражающая закон сохранения энергии:

$$\frac{dW}{dt} = -P, \quad (1.24)$$

где $W = \int_V \left(\frac{\epsilon_a \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_a \vec{H}^2}{2} \right) dv$ - энергия электромагнитного поля, запасенная в области V ;

P - полная мощность, которую можно представить в виде:

$$P = P^{CT} + P_{\Pi} + P_{\Sigma}, \quad (1.24a)$$

$$P^{cm} = \int_V \vec{j}^{cm} \vec{E} dv < 0 \quad - \quad \text{мгновенная мощность,}$$

вырабатываемая источниками;

$$P_{\Pi} = \int_V \sigma \vec{E}^2 dv > 0 \quad - \quad \text{мгновенная мощность, расходуемая на}$$

нагрев среды в области V ;

$$P_{\Sigma} = \oint_S [\vec{E} \vec{H}] \vec{ds} \quad - \quad \text{мгновенная мощность, проходящая через}$$

поверхность S ;

$\vec{P} = [\vec{E} \vec{H}]$ - вектор Пойнтинга, представляющий плотность потока мощности.

Если полная мощность $P = 0$, то энергия электромагнитного поля в области V остается постоянной.

Из (1.24) и (1.24а) следует, что величина электромагнитной энергии в области V может измениться в силу ряда причин:

1) за счет действия источников энергия возрастает:

$$P^{cm} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{dW}{dt} > 0;$$

2) за счет нагрева среды энергия уменьшается:

$$P_{\Pi} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{dW}{dt} < 0;$$

3) за счет излучения из области V , когда $P_{\Sigma} > 0$, энергия уменьшается:

$$\frac{dW}{dt} < 0;$$

4) за счет притока энергии извне, когда $P_{\Sigma} < 0$, энергия возрастает: $\frac{dW}{dt} > 0$.

Доказательство теоремы Пойнтинга

Умножая обе части первого уравнения системы (1.18) скалярно на вектор \vec{E} , а обе части второго - на вектор \vec{H} , вычитая

затем почленно первое из второго и используя тождество векторного анализа

$$\operatorname{div}[\vec{a}\vec{b}] = \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b}, \quad (1.25)$$

получим следующее соотношение:

$$\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}] = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_a \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_a \vec{H}^2}{2} \right) - \sigma \vec{E}^2 - \vec{j}^{cm} \vec{E}. \quad (1.26)$$

Интегрируя обе части выражения (1.26) по произвольному объему V и применяя к интегралу в левой части теорему Остроградского-Гаусса (1.10а), получим уравнение энергетического баланса (1.24).

1.9. Уравнения электродинамики и теорема Пойнтинга для монохроматического электромагнитного поля

Монохроматическим электромагнитным полем называется электромагнитное поле, все характеристики которого изменяются с течением времени по закону гармонических колебаний, т.е. колеблются с круговой частотой ω .

В этом случае выражения для векторов \vec{E} и \vec{H} можно представить в виде:

$$\vec{E} = \operatorname{Re} \left(\dot{\vec{E}}_m e^{i\omega t} \right), \quad \vec{H} = \operatorname{Re} \left(\dot{\vec{H}}_m e^{i\omega t} \right)$$

где $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$ - комплексные амплитуды векторов \vec{E} и \vec{H} , удовлетворяющие следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} 1). \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m &= i\omega \dot{\varepsilon}_a \dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_m^{cm} \\ 2). \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m &= -i\omega \dot{\varepsilon}_a \mu_a \dot{\vec{H}}_m, \end{aligned} \quad (1.28)$$

в которую входит комплексная электрическая проницаемость среды

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a (1 - i \operatorname{tg} \delta).$$

Уравнения (1.28) называются уравнениями электродинамики для комплексных амплитуд поля, или уравнениями электродинамики в комплексной форме.

Используя тождество векторного анализа $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0$ и закон сохранения заряда (1.12), из уравнений (1.28) легко получить третье и четвертое уравнения Максвелла в комплексной форме:

$$\begin{aligned} 3). \operatorname{div} \vec{D}_m &= \dot{\rho}_m, \\ 4). \operatorname{div} \vec{B}_m &= 0. \end{aligned} \quad (1.28a)$$

В дальнейшем будем рассматривать только монохроматические поля, имея в виду, что любой электромагнитный сигнал может быть представлен в виде ряда или интеграла Фурье по гармоническим составляющим.

Для монохроматического электромагнитного поля важными представляются средние значения энергетических характеристик. Среднее значение периодической функции $f(t)$ (скалярной или векторной) определяется по формуле:

$$\overline{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (1.29)$$

где T - период колебания.

Используя эту формулу, выражения для энергетических характеристик, рассмотренных в разделе [1.6], а также введенные выше понятия комплексных амплитуд, можно получить следующие выражения для средних значений энергии электромагнитного поля \overline{W} , мощности тепловых потерь \overline{P}_Π , мощности источников \overline{P}^{CT} мощности излучения \overline{P}_Σ и вектора Пойнтинга $\overline{\vec{P}}$:

$$\begin{aligned} \overline{W}^\varnothing &= \frac{1}{4} \int_V \varepsilon_a \vec{E}_m \vec{E}_m^* dv; \quad \overline{W}^M = \frac{1}{4} \int_V \mu_a \vec{H}_m \vec{H}_m^* dv, \\ \overline{W} &= \overline{W}^\varnothing + \overline{W}^M, \\ \overline{P}_\Pi &= \frac{1}{2} \int_V \sigma \vec{E}_m \vec{E}_m^* dv, \end{aligned}$$

$$\bar{P}^{cm} = \text{Re } \dot{P}^{cm}; \quad \dot{P}^{cm} = \frac{1}{2} \int_V \dot{j}_m^{cm*} \dot{E}_m dv,$$

$$\bar{P}_\Sigma = \text{Re } \dot{P}_\Sigma; \quad \dot{P}_\Sigma = \oint_S \dot{\vec{P}} d\vec{S}; \quad \bar{\vec{P}} = \text{Re } \dot{\vec{P}},$$

$$\dot{\vec{P}} = \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right] - \text{комплексный вектор Пойнтинга.}$$

Средние значения энергетических характеристик связаны между собой следующим соотношением

$$i2\omega(\bar{W}^M - \bar{W}^\vartheta) = -\bar{P}_\Pi - \dot{P}_\Sigma - \dot{P}^{cm}, \quad (1.30)$$

которое представляет собой математическую формулировку теоремы Пойнтинга для комплексных амплитуд поля или теорему Пойнтинга в комплексной форме.

Доказательство теоремы Пойнтинга

Перепишем первое уравнение системы (1.28) для комплексно сопряженных значений входящих в него величин:

$$\text{rot} \dot{\vec{H}}_m^* = -i\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_m^* + \sigma \dot{\vec{E}}_m^* + \dot{j}_m^{cm*}.$$

Умножим обе части этого уравнения скалярно на вектор $\dot{\vec{E}}_m$, а обе части второго уравнения (1.28) – скалярно на вектор $\dot{\vec{H}}_m^*$, затем, вычитая почленно первое из второго и используя тождество (1.25), получим следующее соотношение:

$$\text{div} \left[\dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right] = i\omega \left(\varepsilon_a \dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{E}}_m^* - \mu_a \dot{\vec{H}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right) - \sigma \dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{E}}_m^* - \dot{j}_m^{cm*} \dot{\vec{E}}_m.$$

Интегрируя обе части этого соотношения по произвольному объему V , применяя к интегралу в левой части теорему Остроградского-Гаусса (1.10а) и используя выражения для средних значений энергетических характеристик, получим соотношение, совпадающее с (1.30).

Из соотношения (1.30) можно получить уравнение энергетического баланса для средних мощностей, приравняв в нём действительные части

$$-\bar{P}^{cm} = \bar{P}_\Pi + \bar{P}_\Sigma. \quad (1.31)$$

Физический смысл этого уравнения состоит в том, что мощность, вырабатываемая источником, в общем случае расходуется на нагрев среды в области V и на излучение из этой области. Полагая удельную проводимость среды равной нулю ($\sigma = 0$), можно определить мощность источников через мощность излучения: если

$$\bar{P}_\Pi = 0, \quad \text{то} \quad -\bar{P}^{cm} = \bar{P}_\Sigma.$$

1.10. Теорема единственности для внутренних и внешних задач электродинамики

Внутренняя задача

Внутренняя задача электродинамики формулируется следующим образом.

В произвольной области V , представляющей линейную изотропную среду, заданы источники электромагнитного поля, определяемые через объемную плотность сторонних токов \vec{j}_m^{cm} .

На поверхности S , ограничивающей область V , заданы граничные условия одного из трех типов:

- 1) на всей поверхности задана тангенциальная составляющая напряженности электрического поля;
- 2) на всей поверхности задана тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля;
- 3) на части поверхности S_1 задана тангенциальная составляющая напряженности электрического поля, а на остальной части поверхности S_2 ($S_1 + S_2 = S$) – тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля.

Требуется найти напряженности электрического и магнитного полей в произвольной точке области V , удовлетворяющие уравнениям (1.28) и заданным граничным условиям на поверхности S .

Внутренняя задача электродинамики имеет единственное решение, если удельная проводимость среды в области V отлична от нуля ($\sigma \neq 0$).

Доказательство

Допустим, что существуют два решения поставленной задачи:

$$\dot{\vec{E}}_{m1}, \dot{\vec{H}}_{m1} \quad \text{и} \quad \dot{\vec{E}}_{m2}, \dot{\vec{H}}_{m2}$$

Составим разность этих решений $\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_{m1} - \dot{\vec{E}}_{m2}$; $\dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{H}}_{m1} - \dot{\vec{H}}_{m2}$ и запишем уравнение энергетического баланса в области V для средних мощностей разностного поля, полагая в (1.31) $\overline{P_\Sigma} = \overline{P_S} = 0$ и $\overline{P^{cm}} = 0$:

$$\overline{P_\Pi} = \frac{1}{2} \int_V \sigma \dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{E}}_m^* dv = 0. \quad (1.32)$$

При $\sigma \neq 0$ подынтегральная функция в (1.32) положительна. Отсюда следует, что $\dot{\vec{E}}_m \equiv 0$, а из второго уравнения (1.28) следует, что и $\dot{\vec{H}}_m = 0$.

Внешняя задача

Для внешней задачи электродинамики источники заданы вне области V , и требуется найти напряженности электрического и магнитного полей вне этой области, удовлетворяющие системе (1.28) и граничным условиям одного из трех рассмотренных выше типов на поверхности S этой области (рис.1.4).

Внешняя задача электродинамики имеет единственное решение в классе полей, убывающих на бесконечности быстрее чем $1/r$.

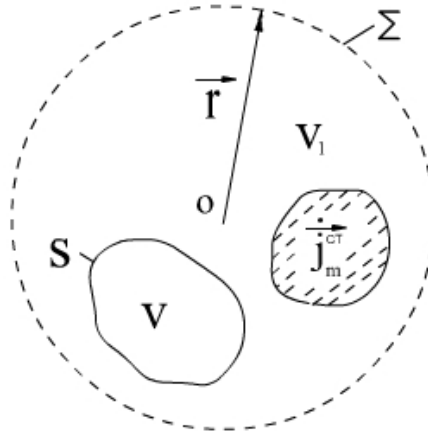


Рис.1.4. Внешняя область.

Доказательство

Составляя, как и прежде разностное решение, покажем, что оно равно нулю:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_{m1} - \dot{\vec{E}}_{m2} = 0, \quad \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{H}}_{m1} - \dot{\vec{H}}_{m2} = 0.$$

С этой целью запишем уравнение энергетического баланса (1.31) для средних мощностей разностного поля в области V_1 , ограниченной поверхностью S и сферической поверхностью Σ , радиус которой стремится к бесконечности. Учитывая, что для разностного поля $\bar{P}^{cm} = 0$, $\bar{P}_S = 0$, получаем:

$$\oint_{\Sigma} \bar{P} d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_{V_1} \sigma \dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{E}}_m^* dv = 0. \quad (1.33)$$

Если $\sigma \neq 0$, то величина вектора Пойнтинга убывает быстрее чем $\frac{1}{r^2}$. Поэтому $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{Re} \frac{1}{2} \oint_{\Sigma} [\dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{H}}_m^*] d\vec{s} = 0$, и из (1.33) следует, что $\dot{\vec{E}}_m = 0$, а из второго уравнения (1.28) следует, что $\dot{\vec{H}}_m = 0$.

Таким образом, для полей, убывающих на бесконечности быстрее чем $1/r$, а это всегда имеет место вследствие потерь в среде, внешняя задача имеет единственное решение.

Заметим, что внешняя задача электродинамики имеет единственное решение и в среде без потерь ($\sigma = 0$). Это решение можно

получить, переходя к пределу в решении, полученном при $\sigma \neq 0$, полагая в нем $\sigma = 0$.

ГЛАВА 2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Постановка задачи

Под электромагнитными волнами понимают электромагнитное поле, переносящее электромагнитную энергию от источника в окружающее пространство.

Свободное пространство это линейная, изотропная, однородная среда с параметрами ε , μ и σ .

Задача возбуждения ставится следующим образом.

В некоторой конечной области пространства V' заданы источники, характеризующиеся объемной плотностью сторонних токов \dot{j}^{cm} . Требуется найти напряженности электрического \dot{E}_m , и магнитного \dot{H}_m полей в произвольной точке пространства, созданные данными сторонними токами и удовлетворяющие неоднородной системе уравнений Максвелла (1.28).

Задача возбуждения электромагнитных волн в свободном пространстве является внешней задачей электродинамики и имеет единственное решение в классе полей, удовлетворяющих условию излучения на бесконечности:

$$0 \leq \oint_{\Sigma_\infty} \vec{P} \cdot d\vec{S} < \infty, \quad (2.1)$$

где Σ_∞ - поверхность сферы радиуса r при $r \rightarrow \infty$.

Физический смысл соотношения (2.1) состоит в том, что при отсутствии потерь ($\sigma = 0$) амплитуды векторов поля убывают на бесконечности как $\frac{1}{r}$, а поток вектора Пойнтинга через поверхность сферы радиуса r при $r \rightarrow \infty$ имеет конечную положительную величину. При наличии сколь угодно малых потерь

($\sigma \neq 0$) амплитуды векторов поля убывают на бесконечности быстрее, чем $\frac{1}{r}$, а поток вектора Пойнтинга $\oint_{\Sigma_\infty} \vec{\Pi} \, d\vec{s} = 0$.

2.2. Волновые уравнения электродинамики. Векторный потенциал

Из системы уравнений (1.28) можно получить волновые уравнения электродинамики относительно векторов поля \vec{E}_m и \vec{H}_m .

Возьмем ротор от обеих частей первого уравнения (1.28):

$$\text{rot rot } \vec{H}_m = i\omega \varepsilon_a \vec{E}_m + \text{rot } \vec{j}_m^{cm} \quad (2.2)$$

Левую часть полученного уравнения преобразуем, используя тождество векторного анализа

$$\Delta \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \text{rot rot } \vec{a}, \quad (2.3)$$

где Δ - оператор Лапласа, а в правую часть подставим $\text{rot } \vec{E}_m$ из второго уравнения (1.28). В результате получим неоднородное волновое уравнение относительно \vec{H}_m :

$$\Delta \vec{H}_m + k^2 \vec{H}_m = -\text{rot } \vec{j}_m^{cm}, \quad (2.4)$$

где $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ и учтено, что в соответствии с (1.28a)

$$\text{div } \vec{H}_m = 0. \quad (2.5)$$

С учетом тождества векторного анализа

$$\text{div rot } \vec{a} \equiv 0 \quad (2.6)$$

из соотношения (2.5) следует, что напряженность магнитного поля можно представить в виде:

$$\vec{H}_m = \text{rot } \vec{A}_m, \quad (2.7)$$

где векторная функция \vec{A}_m , называемая векторным потенциалом, удовлетворяет волновому уравнению:

$$\Delta \vec{A}_m + k^2 \vec{A}_m = -\vec{j}_m^{cm}. \quad (2.8)$$

Используя (2.7), (2.8) и тождество (2.3), из первого уравнения системы (1.28) получим следующее выражение для вектора \vec{E}_m :

$$\vec{E}_m = \frac{1}{i\omega\epsilon_a} \left(\text{grad div} \vec{A}_m + k^2 \vec{A}_m \right). \quad (2.9)$$

Таким образом, решив уравнение для векторного потенциала (2.8), можно по формулам (2.7) и (2.9) найти напряженности электрического и магнитного поля.

2.3. Векторный потенциал элемента электрического тока

Элементом электрического тока называется точечный источник, характеризуемый моментом:

$$\vec{P}_m^{cm} = \vec{I}_m^{cm} \vec{l} = \int_{V'} \vec{j}_m^{cm} dv' \quad (2.10)$$

где l - длина элемента, а \vec{I}_m^{cm} - комплексная амплитуда стороннего тока.

Рассмотрим задачу о нахождении векторного потенциала элемента электрического тока, расположенного в начале системы координат и направленного вдоль оси z (рис.2.1).

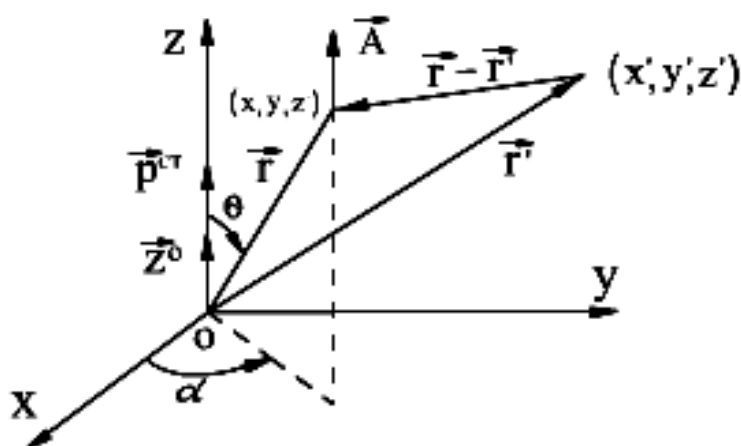


Рис.2.1.Элемент с током в совмещенных координатных системах (x, y, z) и (r, θ, α)

Во всех точках пространства, за исключением начала координат, векторный потенциал удовлетворяет однородному волновому уравнению (уравнению (2.8) при $\dot{j}_m^{CT} = 0$):

$$\Delta \vec{\dot{A}}_m + k^2 \vec{\dot{A}}_m = 0. \quad (2.11)$$

Из (2.8) следует, что векторный потенциал элемента тока параллелен элементу, и его можно представить в виде:

$$\vec{\dot{A}}_m = \vec{z}^0 \dot{A}_m \quad (2.12)$$

При этом функция \dot{A}_m удовлетворяет скалярному волновому уравнению

$$\Delta \dot{A}_m + k^2 \dot{A}_m = 0 \quad (2.13)$$

В силу центральной симметрии величина \dot{A}_m зависит только от величины радиуса- вектора \vec{r} и не зависит от его направления в пространстве, определяемого угловыми координатами θ и α . При этом величина $\Delta \dot{A}_m$ с учетом тождества векторного анализа

$$\Delta \dot{A}_m = \text{div grad } \dot{A}_m \quad (2.14)$$

в сферической системе координат представляется выражением

$$\Delta \dot{A}_m = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \dot{A}_m}{dr} \right),$$

и уравнение (2.13) приводится к виду:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \dot{A}_m}{dr} \right) + k^2 \dot{A}_m = 0. \quad (2.15)$$

Решаем уравнение (2.15) с помощью подстановки

$$\dot{A}_m = \frac{\dot{F}_m}{r}, \quad (2.16)$$

которая приводит к следующему уравнению для функции \dot{F}_m :

$$\frac{d^2 \dot{F}_m}{dr^2} + k^2 \dot{F}_m = 0 . \quad (2.17)$$

Общее решение этого уравнения можно представить в виде:

$$\dot{F}_m = \dot{C}_1 e^{-jk'r} + \dot{C}_2 e^{-jk''r} . \quad (2.18)$$

Так как функция $e^{jk'r} = e^{j(k'-ik'')r} = e^{k''r} e^{ik'r}$ ($k' > 0, k'' > 0$) стремится к бесконечности при $r \rightarrow \infty$, то постоянная $C_2 = 0$. Постоянную C_1 найдем, используя неоднородное волновое уравнение (2.8), правая часть которого удовлетворяет условию:

$$\int_{V \rightarrow 0} \dot{j}_m^{cm} dv' = \vec{z}^0 \dot{I}_m^{cm} l , \quad (2.19)$$

где V - область в окрестности точки O (рис.2.1.).

Подставляя в уравнение (2.8) векторный потенциал в виде

$\dot{A}_m = \vec{z}^0 \dot{C}_1 \frac{e^{-ik'r}}{r}$, интегрируя слева и справа по объему шара радиуса r и устремляя затем r к нулю, получаем:

$$\int_{V \rightarrow 0} \text{div grad} \left(\dot{C}_1 \frac{e^{-ik'r}}{r} \right) dv' + k^2 \int_{V \rightarrow 0} \dot{C}_1 \frac{e^{-ik'r}}{r} dv' = -\dot{I}_m^{cm} l . \quad (2.20)$$

Второй интеграл в левой части этого уравнения равен нулю. Первый интеграл преобразуем, используя теорему Остроградского-Гаусса (1.10а):

$$\begin{aligned} \int_{V \rightarrow 0} \text{div grad} \left(\dot{C}_1 \frac{e^{-ik'r}}{r} \right) dv' &= \dot{C}_1 \oint_{S_r \rightarrow 0} \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{r}^\circ ds = \dot{C}_1 \oint_{S_r \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \vec{r}^\circ \vec{r}^\circ ds = \\ &= \dot{C}_1 \left(-\frac{1}{r^2} \right) 4\pi r^2 \Big|_{r \rightarrow 0} = -\dot{C}_1 4\pi \end{aligned} \quad (2.21)$$

и получаем $-\dot{C}_1 4\pi = -\dot{I}_m^{cm} l$, откуда

$$\dot{C}_1 = \frac{\dot{I}_m^{cm} l}{4\pi} .$$

Окончательное выражение для векторного потенциала элемента электрического тока имеет вид:

$$\vec{A}_m = \vec{z}_0 \frac{\dot{I}_m^{cm} l}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (2.22)$$

Если элемент тока расположен в произвольной точке пространства, определяемой радиусом- вектором $\vec{r}'(x', y', z')$ (рис.2.1.), то выражение для векторного потенциала можно представить в виде:

$$\vec{A}_m = \frac{\dot{I}_m^{cm} \vec{l}}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad (2.23)$$

где $|\vec{r}-\vec{r}'|$ - расстояние между элементом тока и точкой пространства, в которой определяется \vec{A}_m .

2.4. Векторный потенциал линейного, поверхностного и объемного токов

Линейным током называется ток, распределенный вдоль некоторого проводящего контура L . Разбивая этот контур на бесконечное множество элементов тока, определяя векторный потенциал каждого такого элемента и суммируя потенциалы от всех элементов, что сводится к вычислению интеграла по контуру L , получим следующее выражение для векторного потенциала линейного тока:

$$\vec{A}_m = \int_L \dot{I}_m^{cm}(\vec{r}') \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{l}'. \quad (2.24)$$

Подынтегральное выражение в (2.24) представляет векторный потенциал элемента электрического тока с моментом $\dot{I}_m^{cm}(\vec{r}') d\vec{l}'$, расположенного в точке \vec{r}' , а сам интеграл - полный векторный потенциал тока, распределенного на контуре L .

Поверхностным током называется ток, распределенный на некоторой поверхности S с поверхностно плотностью $\dot{\vec{\eta}}_m^{cm}$ (рис.2.2.). Рассматриваем плоский элемент поверхности $ds' = dl' \cdot dh'$ как элемент электрического тока с моментом

$$\dot{I}_m^{cm} d\vec{l}' = \dot{\eta}_m^{cm} dh' d\vec{l}' = \dot{\vec{\eta}}_m^{cm} ds',$$

векторный потенциал которого $d\vec{A}_m$ определяется выражением (2.23):

$$d\vec{A}_m = \vec{\eta}_m^{cm}(\vec{r}') \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} ds' . \quad (2.23a)$$

Полный векторный потенциал поверхностного тока определяется интегрированием выражения (2.23a) по поверхности S :

$$\vec{A}_m = \int_S \vec{\eta}_m^{cm}(\vec{r}') \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} ds' \quad (2.25)$$

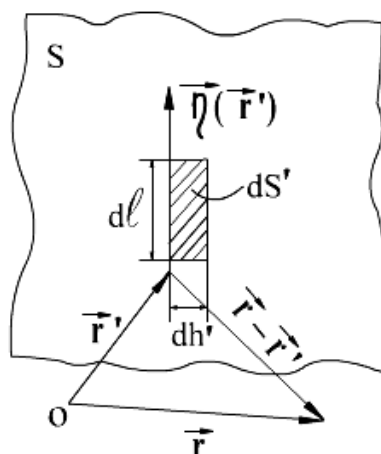


Рис.2.2.Элемент поверхностного тока

Объемным током называется ток, распределенный в некотором объеме V с объемной плотностью \vec{j}_m^{cm} (рис.2.3.).Выделяем элементарный цилиндрический объем $dv' = ds' \cdot dl'$ и рассматриваем его как элемент электрического тока, векторный потенциал которого определяется выражением (2.23), в котором нужно положить:

$$I_m^{cm} \vec{l} = \vec{j}_m^{cm} ds' d\vec{l}' = \vec{j}_m^{cm} dv' .$$

При этом

$$d\vec{\dot{A}}_m = \vec{\dot{j}}_m^{cm}(\vec{r}') \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv', \quad (2.236)$$

и полный векторный потенциал определяется интегрированием выражения (2.236) по объему проводника v :

$$\vec{\dot{A}}_m = \int_v \vec{\dot{j}}_m^{cm}(\vec{r}') \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv'. \quad (2.26)$$

Формула (2.26) дает решение неоднородного волнового уравнения (2.8).

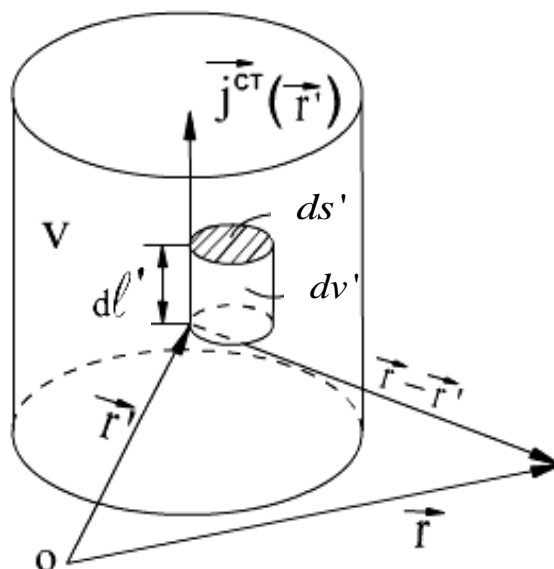


Рис.2.3.Элемент объемного тока

2.5. Электромагнитное поле поверхностного тока, равномерно распределенного на бесконечной плоскости. Плоские однородные волны (ПОВ)

Введем декартову систему координат x, y, z , (рис.2.4.), и пусть в плоскости $z=0$ задан сторонний ток, поверхностная плотность которого постоянна, и представляется в виде.

$$\vec{\eta}_m^{cm} = -x^0 \vec{\dot{\eta}}_m^{cm}. \quad (2.27)$$

Функция $e^{-ikz} = e^{-k''z} e^{-k'z}$ ($k'' > 0$) стремится к бесконечности при $z \rightarrow -\infty$, а функция $e^{ikz} = e^{k''z} e^{k'z}$ стремится к бесконечности при $z \rightarrow \infty$. Поэтому выражения для векторного потенциала представляем в виде:

$$\dot{\vec{A}}_m = \vec{x}^0 \begin{cases} C_1 e^{-ikz}, & z > 0 \\ C_2 e^{ikz}, & z < 0 \end{cases}, \quad (2.29)$$

Используя (2.9) и учитывая, что $\text{div} \dot{\vec{A}}_m = 0$, получим следующее выражение для напряженности электрического поля:

$$\vec{E}_m = -i\dot{W}k\dot{\vec{A}}_m = -\vec{x}^0 i\dot{W}k \begin{cases} \dot{C}_1 e^{-ikz}, & z > 0 \\ \dot{C}_2 e^{ikz}, & z < 0 \end{cases}, \quad (2.30)$$

где $W = \sqrt{\mu_a / \dot{\epsilon}_a}$.

Из условия непрерывности тангенциальной составляющей напряженности электрического поля при $z=0$ следует, что $\dot{C}_1 = \dot{C}_2 = \dot{C}$.

Используя (2.7), получим следующее выражение для напряженности магнитного поля:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_m = \text{rot} \dot{\vec{A}}_m &= \begin{vmatrix} \vec{x}^0 & \vec{y}^0 & \vec{z}^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{A}_{mx} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{y}^0 \frac{\partial \dot{A}_{mx}}{\partial z}, \\ \dot{\vec{H}}_m &= \begin{cases} \vec{y}^0 (-ik) \dot{C} e^{-ikz}, & z > 0 \\ \vec{y}^0 (ik) \dot{C} e^{ikz}, & z < 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Используя граничное условие (1.22) для напряженности магнитного поля, получим:

$$\left[\vec{z}^0 \left(\dot{\vec{H}}_m|_{z=+0} - \dot{\vec{H}}_m|_{z=-0} \right) \right] = \vec{x}^0 2ik\dot{C} = -\vec{x}^0 \dot{\eta}_m^{cm}$$

Отсюда, $C = -\frac{\dot{\eta}_m^{cm}}{i2k}$ и выражения для напряжённостей поля \vec{E}_m и $\dot{\vec{H}}_m$ принимают следующий вид:

$$\dot{\vec{H}}_m = \begin{cases} \vec{y}^\circ \frac{\dot{\eta}_m^{cm}}{2} e^{-ikz}, z > 0 \\ -\vec{y}^\circ \frac{\dot{\eta}_m^{cm}}{2} e^{ikz}, z < 0 \end{cases}$$

$$\dot{\vec{E}}_m = \vec{x}^\circ \frac{\dot{\eta}_m^{cm}}{2} \dot{W} e^{-ik|z|} \quad (2.32)$$

Электромагнитное поле, определяемое выражениями (2.32), удовлетворяет при $|z| > 0$ однородной системе уравнений электродинамики (системе (1.28) при $\dot{j}_m^{cm} = 0$) и граничным условиям (1.21), (1.22) на плоскости $z=0$.

Таким образом, выражения (2.32), в силу теоремы единственности, являются решением поставленной задачи.

Электромагнитное поле, напряженность которого определяется этими выражениями, представляет собой плоскую однородную электромагнитную волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z при $z > 0$ и в отрицательном – при $z < 0$. При этом комплексные амплитуды $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$ связаны между собой соотношениями:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{W} \left[\overrightarrow{H_m}, \overrightarrow{\pi^0} \right]; \quad \dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{\dot{W}} \left[\overrightarrow{\pi^0}, \dot{\vec{E}}_m \right], \quad (2.33)$$

где $\overrightarrow{\pi^0}$ - единичный вектор, указывающий направление распространения волны

$$\overrightarrow{\pi^0} = \begin{cases} \overrightarrow{z_0} & \text{при } z > 0 \\ -\overrightarrow{z_0} & \text{при } z < 0 \end{cases}.$$

Таким образом, поверхностный электрический ток, равномерно распределенный на бесконечной плоскости $z=0$, возбуждает плоские однородные волны, распространяющиеся в обе стороны от этой плоскости.

Постоянные $\dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\varepsilon}_a \mu_a}$ и $\dot{W} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot{\varepsilon}_a}}$ являются важными

электродинамическими параметрами. Постоянная \dot{k} называется волновым числом, а постоянная \dot{W} - волновым сопротивлением среды.

Используя формулу (1.28а), представим выражения для \dot{k} и \dot{W} в виде:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \omega \sqrt{\dot{\varepsilon}_a \mu_a} = k \sqrt{1 - i \cdot \operatorname{tg} \delta} = k' - ik'', (k' > 0, k'' > 0) \\ \dot{W} &= \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot{\varepsilon}_a}} = \frac{W}{\sqrt{1 - i \cdot \operatorname{tg} \delta}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ и $W = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$ - волновое число и волновое сопротивление при $\sigma = 0$.

2.6. Основные характеристики ПОВ

Рассмотрим ПОВ, распространяющуюся в положительном направлении оси z . Ось x совместим с направлением вектора \vec{E} . Выражения для комплексных амплитуд полей представим в виде:

$$\dot{\vec{E}}_m = \vec{x}^0 \dot{E}_0, \quad \dot{\vec{H}}_m = \vec{y}^0 \frac{\dot{E}_0}{\dot{W}} e^{-ikz} \quad (2.35)$$

где $\dot{E}_0 = |\dot{E}_0| e^{i\varphi_0}$ - комплексная константа.

Запишем выражения для мгновенных значений векторов поля:

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{Re}(\dot{\vec{E}}_m e^{i\omega t}) = \vec{x}^0 |\dot{E}_0| e^{-ik'z} \cos(\omega t - k'z + \varphi_0) \\ H &= \operatorname{Re}(\dot{\vec{H}}_m e^{i\omega t}) = \vec{y}^0 \frac{|\dot{E}_0|}{|\dot{W}|} e^{-ik''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi_0 - \varphi_w) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Дадим некоторые важные определения:

1. Амплитудой волны называется максимальное значение напряжённости электрического поля $E_m = |\dot{E}_0| e^{-k''z}$ или максимальное значение напряжённости магнитного поля $H_m = \frac{1}{|\dot{W}|} \cdot E_m$. Коэффициент k'' называется коэффициентом затухания.

Если амплитуда волны не зависит от поперечных координат (x,y), то такая волна называется однородной.

2. Фазой волны называется аргумент косинусоидальной функции в выражениях (2.36) для напряжённости электрического поля или магнитного поля: $\Phi^E = \omega t - k'z + \phi_0$, $\Phi^H = \Phi^E - \phi_w$. Коэффициент $k' = \text{Re } \dot{k}$ называется коэффициентом фазы.

3. Фронтом волны называется поверхность, в каждой точке которой фаза волны одна и та же. В рассматриваемом нами случае такой поверхностью является плоскость $z = \text{const}$, поэтому и волна называется плоской.

4. Фазовой скоростью волны называется скорость перемещения фронта волны:

$$v_\phi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}, \quad (2.37)$$

где Δz - перемещение фронта волны за время Δt .

Приравнивая фазы $\Phi(t, z) = \Phi(t + \Delta t, z + \Delta z)$ и используя выражение (2.37), получим следующую формулу для расчёта фазовой скорости:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k'}. \quad (2.38)$$

5. Длиной волны называется расстояние, на котором фаза волны изменяется на величину 2π :

$$\Phi(t, z) - \Phi(t, z + \lambda) = 2\pi \quad (2.39)$$

Отсюда, используя выражение для фазы, получаем следующую формулу для расчёта λ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k'} \quad (2.40)$$

Характеристики ПОВ, распространяющейся в идеальном диэлектрике.

Для идеального диэлектрика: $\sigma = 0$,

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a} = 0, \quad k' = k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}, k'' = 0, \dot{W} = W = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}.$$

Амплитуда волны $E_m = \text{const}$ (не зависит от z), $H_m = \frac{E_m}{W}$.

Фаза волны: $\Phi^E = \Phi^H = \omega t - kz + \varphi_0, (\varphi_w = 0)$.

Фазовая скорость: $v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$,

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ м/с}$ - скорость света в вакууме.

Длина волны:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k'} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \frac{c}{f \sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon \mu}},$$

где $\lambda_0 = \frac{c}{f}$, а частота $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

Характеристики ПОВ, распространяющейся в неидеальном диэлектрике ($\operatorname{tg} \delta \ll 1$).

$$\dot{k} = k \sqrt{1 - i \operatorname{tg} \delta} \approx k(1 - i \frac{\operatorname{tg} \delta}{2}); k' = k, k'' = k \frac{\operatorname{tg} \delta}{2}$$

$$\dot{W} = \frac{W}{\sqrt{1 - i \operatorname{tg} \delta}} \approx W, \phi_w = 0.$$

Амплитуда волны: $E_m = E_0 e^{-k''z} = E_0 e^{-k \frac{\operatorname{tg} \delta}{2} z}. \quad (2.41)$

Остальные характеристики рассчитываются по тем же формулам, что и для идеального диэлектрика.

Характеристики ПОВ, распространяющиеся в проводнике ($\operatorname{tg} \delta \gg 1$).

$$\dot{k} = k\sqrt{1-itg\delta} \approx k\sqrt{\frac{tg\delta}{2}}(1-i); k' = k'' = k\sqrt{\frac{tg\delta}{2}};$$

$$\dot{W} = \frac{W}{\sqrt{1-itg\delta}} \approx \frac{W}{\sqrt{tg\delta}} e^{i\frac{\pi}{4}}, \phi_W = \frac{\pi}{4}$$

Амплитуда волны: $E_m = E_0 e^{-k''z} = E_0 e^{-k\sqrt{\frac{tg\delta}{2}}z}. \quad (2.42)$

Фаза волны: $\Phi^E = \omega t - k'z + \varphi_0, \Phi^H = \Phi^E - \frac{\pi}{4}.$

Фазовая скорость: $v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{k\sqrt{\frac{tg\delta}{2}}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\frac{tg\delta}{2}}}$

Длина волны: $\lambda = \frac{2\pi}{k'} = \frac{2\pi}{k} \bigg/ \sqrt{\frac{tg\delta}{2}}.$

Очевидно, что фазовая скорость и длина волны в проводнике гораздо меньше, чем в диэлектрике (в $\sqrt{tg\delta/2}$ раз).

Сравним затухание волны в диэлектрике и в проводнике на расстоянии $z = \lambda = \frac{2\pi}{k'}$.

В диэлектрике ($tg\delta \ll 1$) волна с амплитудой E_0 , пройдя расстояние $z = \lambda$, имеет амплитуду:

$E_m^D = E_0 e^{-k(tg\delta/2)(\frac{2\pi}{k})} = E_0 e^{-\pi \cdot tg\delta} \approx E_0(1 - \pi \cdot tg\delta) \approx E_0$ (здесь использовано разложение в степенной ряд функции e^{-x} при малых x). Таким образом, амплитуда волны практически не меняется.

В проводнике ($\operatorname{tg} \delta \gg 1$) волна с амплитудой E_0 , пройдя расстояние $z = \lambda$, имеет амплитуду

$$E_m^{np} = E_0 e^{-k''(2\pi/k')} = E_0 e^{-2\pi} \approx 0.001867 E_0.$$

Т.о., амплитуда волны уменьшается более чем в 500 раз.

2.7. ПОВ с линейной, круговой и эллиптической поляризацией векторов поля.

Введём понятие плоскости поляризации.

Плоскостью поляризации называется плоскость, которая проходит через направление распространения волны и вектор напряжённости электрического поля \vec{E} .

В общем случае выражения для комплексных амплитуд векторов поля ПОВ являются частным решением однородной системы уравнений электродинамики, зависящим только от одной декартовой координаты z , и представляется в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m &= (\vec{x}^0 \dot{E}_{0x} + \vec{y}^0 \dot{E}_{0y} \dot{A}_2) e^{-ikz}, & \dot{E}_{0x} &= |\dot{E}_{0x}| e^{i\varphi_{0x}} \\ \dot{\vec{H}}_m &= \frac{1}{\dot{W}} \left[\vec{z}^0 \dot{\vec{E}}_m \right] = \frac{e^{-ikz}}{\dot{W}} (\vec{y}^0 \dot{E}_{0x} - \vec{x}^0 \dot{E}_{0y}), & \dot{E}_{0y} &= |\dot{E}_{0y}| e^{i\varphi_{0y}} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Электромагнитное поле, соответствующее этим представлениям, можно рассматривать как сумму двух ПОВ, причём плоскость поляризации одной совпадает с плоскостью xoz , а второй – с плоскостью $yo z$.

Запишем выражение для мгновенного значения вектора электрического поля \vec{E} :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{x}^0 |\dot{E}_{0x}| e^{-k'z} \cos(\omega t - k'z + \varphi_{0x}) + \vec{y}^0 |\dot{E}_{0y}| e^{-k'z} \cdot \\ &\cos(\omega t - k'z + \varphi_{0y}). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Обозначим через α угол между плоскостью поляризации P и плоскостью xoz (рис. 2.5.) Рассмотрим выражение:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_y}{E_x} = \frac{|\dot{E}_{0y}| \cos(\omega t - k'z + \phi_{0y})}{|\dot{E}_{0x}| \cos(\omega t - k'z + \phi_{0x})} \quad (2.45)$$

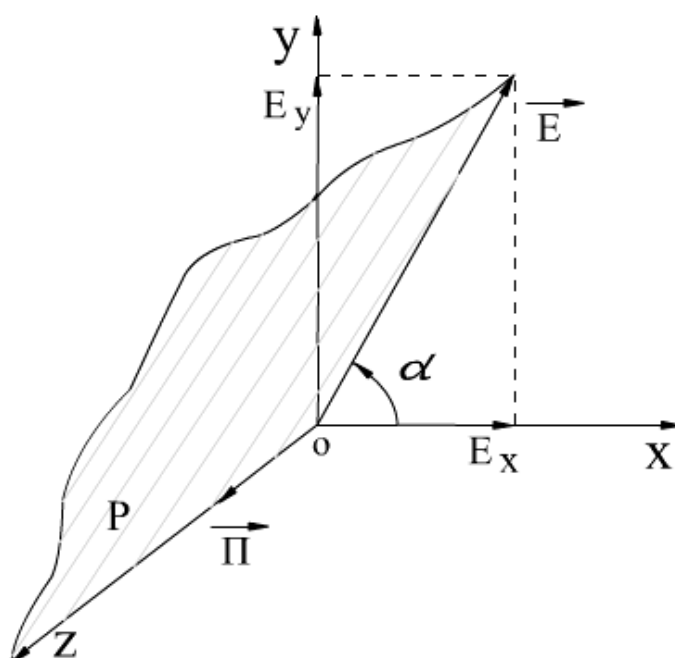


Рис.2.5. Плоскость поляризации P в декартовых координатах.

Если фазы двух волн совпадают ($\phi_{0x} = \phi_{0y}$), то угол α не меняется с течением времени, и плоскость поляризации сохраняет своё положение в пространстве. Такая волна называется волной с линейной поляризацией векторов поля.

Волна, у которой плоскость поляризации с течением времени вращается вокруг оси z (совпадающей с направлением вектора Пойнтинга), а конец вектора \vec{E} описывает окружность в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, называется волной с круговой поляризацией вектора поля. При этом, если вращение плоскости поляризации происходит по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления распространения волны, то такая волна называется волной с правой круговой поляризацией, а если против часовой стрелки – с левой круговой поляризацией векторов поля.

Волна с правой круговой поляризацией определяется выражениями (2.43), (2.44) при $|\dot{E}_{0x}| = |\dot{E}_{0y}| = E_0$, $\varphi_{0y} = \varphi_{0x} - \frac{\pi}{2}$. При

$$\begin{aligned} |\vec{E}| &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_0 e^{-k'z}; \\ \text{этом} \quad \quad \quad \text{tg } \alpha &= \text{tg}(\omega t - k'z + \varphi_{0x}) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Отсюда видно, что угол α с течением времени увеличивается, и плоскость поляризации вращается с круговой частотой ω .

Волна с левой круговой поляризацией определяется выражениями (2.43), (2.44) при $|\dot{E}_{0x}| = |\dot{E}_{0y}| = E_0$, $\varphi_{0y} = \varphi_{0x} + \frac{\pi}{2}$. При

$$\text{этом} \quad |E| = E_0 e^{-k'z}, \quad \text{tg } \alpha = -\text{tg}(\omega t - k'z + \varphi_{0x}). \quad (2.47)$$

Таким образом, волна с круговой поляризацией векторов поля есть результат сложения двух волн, поляризованных в двух ортогональных плоскостях (xoz и yoz) с равными амплитудами фазы которых отличаются на $\frac{\pi}{2}$.

В общем случае, при сложении волн с различными амплитудами и произвольным сдвигом фаз получаем волну с эллиптической поляризацией векторов поля. Конец вектора \vec{E} такой волны описывает эллипс в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

Волны с эллиптической поляризацией векторов поля определяются выражениями (2.43), (2.44) при произвольных соотношениях между амплитудами $|\dot{E}_{0x}|$ и $|\dot{E}_{0y}|$ и фазами ϕ_{0x} и ϕ_{0y} .

2.8. Электромагнитное поле элементарного электрического излучателя. Основные характеристики.

Векторный потенциал

Элементарный электрический излучатель – это короткий отрезок тонкого провода, по которому течёт электрический ток с постоянной амплитудой и фазой. (рис.2.6.). При этом длина провода l много меньше расстояния r до точки, в которой определяется поле (рис.2.6.), и много меньше длины волны $\lambda = \frac{2\pi}{k'}$, где k' - коэффициент фазы, а радиус провода a много меньше его длины l . Комплексная амплитуда стороннего тока \dot{I}_m^{cm} в каждой точке излучателя является постоянной величиной. Таким образом, условия элементарности можно записать в виде:

$$\text{а) } l \ll r; \text{ б) } l \ll \lambda; \text{ в) } a \ll l; \text{ г) } \dot{I}_m^{cm} = \text{const.} \quad (2.48)$$

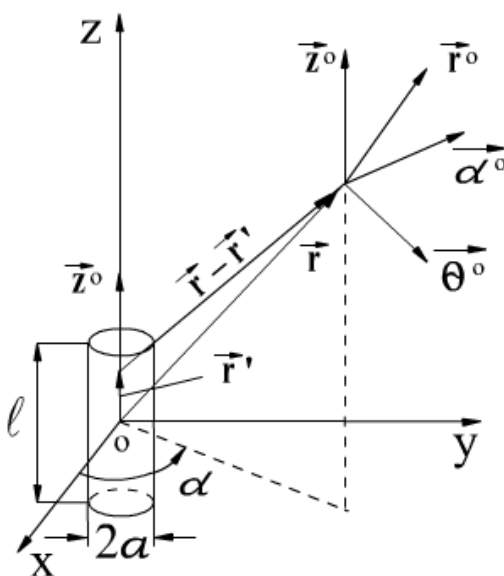


Рис. 2.6. Элементарный электрический излучатель.

Рассматривая элементарный излучатель как прямолинейный отрезок линейного тока и используя выражение (2.24), представим векторный потенциал в виде:

$$\dot{\vec{A}}_m = \vec{z}_0 \frac{\dot{I}_m^{cm}}{4\pi} \int_{z'=-\frac{l}{2}}^{z'=\frac{l}{2}} \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dz', \quad (2.49)$$

где \vec{r}' - радиус-вектор, проведённый из начала координат в произвольную точку излучателя z' на оси z : $\vec{r}' = \vec{z}^\circ z', (-\frac{l}{2} \leq z' \leq \frac{l}{2})$.

Из условий элементарности (2.48а,б) следует, что подынтегральная функция практически не меняется на интервале интегрирования, и её можно вынести за знак интеграла, положив в ней $z' = 0$. В результате получим следующее выражение для векторного

потенциала:

$$\dot{\vec{A}}_m = \vec{z}^\circ \frac{\dot{I}_m^{cm} l e^{-ikr}}{4\pi r}. \quad (2.50)$$

Как видно, оно совпадает с выражением для векторного потенциала элемента электрического тока (2.22).

Напряжённость поля

Напряжённость электрического поля находим, используя формулу (2.7) $\dot{\vec{H}}_m = \text{rot} \dot{\vec{A}}_m$ и представление $\text{rot} \dot{\vec{A}}_m$ в сферической системе координат (r, θ, α) :

$$\dot{\vec{H}}_m = \begin{vmatrix} \vec{r}^\circ & \vec{\theta}^\circ & \vec{\alpha}^\circ \\ \frac{1}{r^2 \sin \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} & \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \dot{A}_{mr} & r \dot{A}_{m\theta} & r \sin \theta \cdot \dot{A}_{m\alpha} \end{vmatrix}, \quad (2.51)$$

где $\vec{r}^\circ, \vec{\theta}^\circ, \vec{\alpha}^\circ$ - орты сферической системы координат (рис. 2.6.).

Векторный потенциал представляем в виде разложения по этим ортам: $\dot{\vec{A}}_m = \vec{r}^\circ \dot{A}_{mr} + \vec{\theta}^\circ \dot{A}_{m\theta} + \vec{\alpha}^\circ \dot{A}_{m\alpha}$, (2.52)

где $\dot{A}_{mr} = \frac{\dot{I}_m^{cm} l e^{-ikr}}{4\pi r} \cos \theta$; $\dot{A}_{m\theta} = -\frac{\dot{I}_m^{cm} l e^{-ikr}}{4\pi r} \sin \theta$; $\dot{A}_{m\alpha} = 0$.

Раскрывая определитель (2.51) по элементам первой строки, получим следующее выражение для комплексной амплитуды напряжённости магнитного поля:

$$\dot{\vec{H}}_m = \vec{\alpha}^\circ \frac{\dot{I}_m^{cm} \dot{k} l}{4\pi} \sin \theta \left(i + \frac{1}{\dot{k} r} \right) \frac{e^{-i\dot{k}r}}{r}. \quad (2.53)$$

Используя первое уравнение электродинамики для комплексных амплитуд (1.28), можно получить следующее выражение для комплексной амплитуды напряжённости электрического поля:

$$\dot{\vec{E}}_m = \frac{1}{i\omega \dot{\varepsilon}_a} \text{rot} \dot{\vec{H}}_m = \frac{\dot{I}_m^{cm} \dot{k} l}{4\pi} \frac{\dot{k}}{i\omega \dot{\varepsilon}_a} \left[\vec{r}^\circ \cos \theta \frac{2}{\dot{k} r} \left(i + \frac{1}{\dot{k} r} \right) + \vec{\theta}^\circ \sin \theta \left(-1 + \frac{i}{\dot{k} r} + \frac{1}{\dot{k}^2 r^2} \right) \right] \frac{e^{-i\dot{k}r}}{r}. \quad (2.54)$$

В зависимости от величины параметра $k'r$ ($k' = \text{Re } \dot{k}$) всё пространство делят на три области:

- 1) область пространства, для которой $k'r \gg 1$ ($r \gg \lambda$), называется дальней зоной (Д.З.);
- 2) область пространства, для которой $k'r \ll 1$ ($r \ll \lambda$), называется ближней зоной (Б.З.);
- 3) оставшая часть пространства называется промежуточной зоной (П.З.).

Наиболее сложную структуру поле имеет в промежуточной зоне. Для расчёта поля в этой области используются формулы (2.53), (2.54).

Для расчёта поля в Б.З. и Д.З. можно получить более простые формулы. Наибольший практический интерес представляет поле в дальней зоне.

2.9. Электромагнитное поле в дальней зоне. Сферическая волна

При расчёте поля в Д.З. в общих выражениях (2.53), (2.54) можно оставить лишь те члены, которые при $r \rightarrow \infty$ убывают как $e^{-i\dot{k}r} / r$. В результате получим следующие выражения для комплексных амплитуд поля:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_m &= \vec{\alpha}^\circ i \frac{\dot{I}_m^{cm} \dot{k}l}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-ikr}}{r}, \\ \dot{\vec{E}}_m &= \vec{\theta}^\circ i \frac{\dot{I}_m^{cm} \dot{k}l}{4\pi} \dot{W} \sin\theta \frac{e^{-ikr}}{r},\end{aligned}\quad (2.55)$$

где $\dot{W} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot{\epsilon}_a}}$ - волновое сопротивление среды.

Электромагнитное поле, напряжённость которого определяется выражениями (2.55), представляет собой сферическую электромагнитную волну, распространяющуюся в радиальных направлениях от излучателя, расположенного в начале координат. При этом векторы $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$ у сферической волны связаны между собой такими же соотношениями, как и для плоской однородной волны:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{W} \left[\dot{\vec{H}}_m \vec{r}^\circ \right] \dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{\dot{W}} \left[\vec{r}^\circ \dot{\vec{E}}_m \right] \quad (2.56)$$

где \vec{r}° - единичный вектор, указывающий направление распространения волны.

Запишем выражения для мгновенных значений векторов \vec{E} и \vec{H} :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{\theta}^\circ \left| \dot{C} \right| \sin\theta \frac{e^{-k'r}}{r} \cos(\omega t - k'r + \phi_c), \\ \vec{H} &= \vec{\alpha}^\circ \frac{\left| \dot{C} \right|}{\left| \dot{W} \right|} \sin\theta \frac{e^{-k'r}}{r} \cos(\omega t - k'r + \phi_c - \phi_w),\end{aligned}\quad (2.57)$$

где $\dot{C} = i \frac{\dot{I}_m^{cm} \dot{k}l}{4\pi} \dot{W}$.

Основные характеристики сферической волны

1) Амплитуда волны - максимальное значение напряжённости электрического и магнитного полей (E_m или H_m):

$$E_m = |\dot{C}| \sin \theta \frac{e^{-k'r}}{r}, H_m = \frac{|\dot{C}|}{|\dot{W}|} \sin \theta \frac{e^{-k'r}}{r}. \quad (2.58)$$

- 2) Фаза волны – аргумент косинусоидальной функции:

$$\Phi^E = \omega t - k'r + \varphi_c; \Phi^H = \Phi^E - \varphi_w. \quad (2.59)$$

- 3) Фронт волны – сферическая поверхность $r = const$.

- 4) Фазовая скорость рассчитывается по формуле (2.38):

$$v_\phi = \frac{\omega}{k'}. \quad (2.60)$$

- 5) Длина волны – рассчитывается по формуле (2.40):

$$\lambda = \frac{2\pi}{k'}. \quad (2.61)$$

Из выражений (2.58) видно, что амплитуда волны зависит от расстояния r и от угла θ . При отсутствии поглощения, т.е. при $\sigma = 0$, амплитуда волны изменяется обратно пропорционально расстоянию r . Если амплитуда волны зависит от поперечных координат θ или α , то волна называется неоднородной.

Если амплитуда волны не зависит от азимутального угла α , то такая волна называется азимутально однородной.

2.10. Диаграмма направленности

Диаграмма направленности – это характеристика излучателя, показывающая зависимость амплитуды поля в дальней зоне от направления в пространстве, или угловых координат θ и α .

Диаграмма направленности в меридиональной плоскости (МП)

Меридиональная плоскость – это плоскость, проходящая через ось z . Уравнение этой плоскости в сферических координатах записывается в виде:

$$\alpha = \alpha_0, \alpha = \alpha_0 + 180^\circ, \text{ где } 0 \leq \alpha_0 \leq 360^\circ \quad (2.62)$$

Диаграмма направленности в меридиональной плоскости представляет кривую, описываемую уравнением:

$$r = \frac{E_m(\theta, \alpha)}{E_{m\max}} \bigg|_{\substack{\alpha = \alpha_0 \\ \alpha = \alpha_0 + 180^\circ}} = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 180^\circ, \quad (2.63)$$

где r – длина радиус-вектора, проведённого в меридиональной плоскости из начала координат под углом θ к оси z ;

$E_m(\theta) = \sqrt{\dot{E}_m \dot{E}_m^*}$ – амплитуда напряжённости электрического поля в дальней зоне; $E_{m\max}$ – максимальное значение амплитуды.

Диаграмма направленности элементарного электрического излучателя в меридиональной плоскости представляет собой две окружности, касающиеся оси z в начале координат (рис. 2.7).

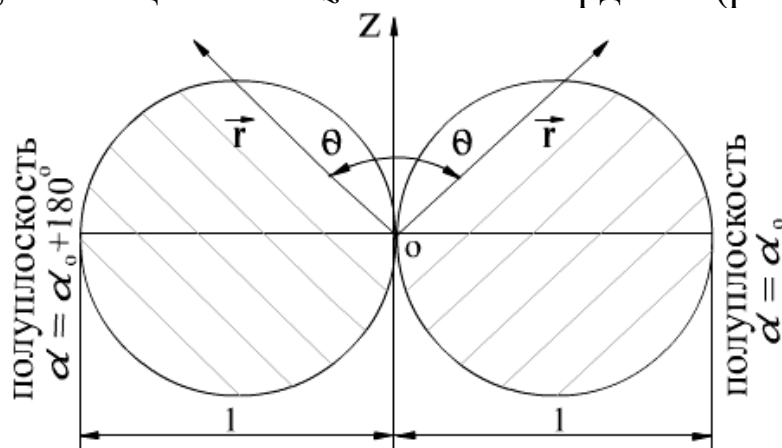


Рис.2.7. Диаграмма направленности в МП

Диаграмма направленности в экваториальной плоскости (ЭП)

Экваториальная плоскость – это плоскость, проходящая через начало координат перпендикулярно оси z . Уравнение этой плоскости в сферических координатах записывается в виде: $\theta = 90^\circ$.

Диаграмма направленности элементарного электрического излучателя в экваториальной плоскости представляет собой кривую, задаваемую уравнением:

$$r = \frac{E_m(\theta, \alpha)}{E_{m\max}} \bigg|_{\theta=90^\circ} = 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 360^\circ, \quad (2.64)$$

где r - длина радиуса-вектора, проведённого в экваториальной плоскости из начала координат под углом α к оси x .

Так как амплитуда волны не зависит от угла α , то диаграмма направленности представляет собой окружность с центром в начале координат (рис. 2.8.).

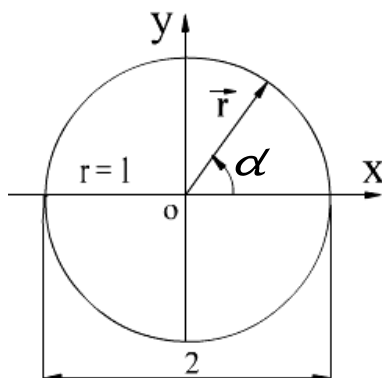


Рис.2.8. Диаграмма направленности в ЭП.

Пространственная диаграмма направленности

Пространственная диаграмма направленности представляет собой поверхность (рис. 2.9.), описываемую уравнением:

$$r = \frac{E_m(\alpha, \theta)}{E_{m\max}} = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 180^\circ, \quad 0 \leq \alpha \leq 360^\circ, \quad (2.65)$$

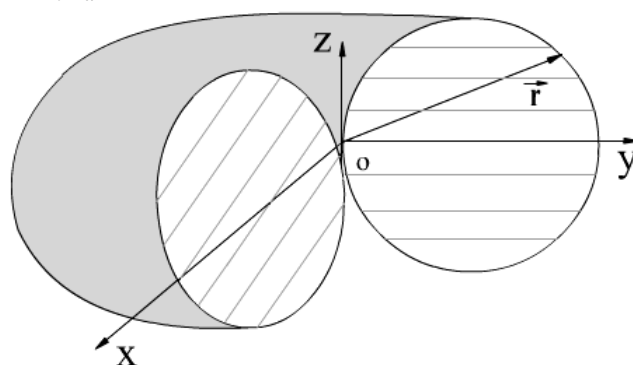


Рис.2.9. Пространственная диаграмма направленности.

Диаграмма направленности строится следующим образом. В заданном направлении, определяемом углами θ и α , проводится радиус-вектор \vec{r} - и на нём откладывается отрезок, длина которого пропорциональна амплитуде поля в этом направлении.

При изменении углов θ и α в пределах $0 \leq \theta \leq 180^\circ, 0 \leq \alpha \leq 360^\circ$ конец радиус-вектора \vec{r} описывает поверхность, задаваемую уравнением (2.65).

Пространственная диаграмма направленности элементарного электрического излучателя представляет собой поверхность тора, образованную вращением окружности, касающейся в начале координат оси z , вокруг этой оси.

2.11. Мощность и сопротивление излучения

Излучаемую мощность можно найти, используя уравнение энергетического баланса (1.31), полагая $P_{\Pi} = 0$ (удельная проводимость среды $\sigma = 0$):

$$\bar{P}_{\Sigma} = \oint_S \bar{\vec{P}} d\vec{s} = -\bar{P}^{cm} > 0, \quad (2.66)$$

где среднее значение вектора Пойтинга

$$\bar{\vec{P}} = \text{Re} \left(\frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right] \right), \quad (2.67)$$

S – замкнутая поверхность, ограничивающая область, в которой расположен излучатель. При этом величина \bar{P}_{Σ} не зависит от формы и размеров поверхности S .

В качестве поверхности S удобно выбрать сферу с центром в начале координат, радиус которой стремится к бесконечности. В этом случае выражение (2.66) для излучаемой мощности приводится к виду:

$$\bar{P}_{\Sigma} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \bar{\vec{P}} \Big|_{r \rightarrow \infty} \vec{r}^0 r^2 \sin \theta d\theta d\alpha. \quad (2.68)$$

При вычислении $\bar{\vec{P}}$ по формуле (2.67) используем выражения (2.55) для поля в дальней зоне:

$$\bar{\vec{P}} = \vec{r}^0 \frac{|\dot{I}_m^{cm}|^2 (kl)^2}{32\pi^2} W \sin^2 \theta \frac{1}{r^2}. \quad (2.69)$$

Подставляя (2.69) в (2.68) и интегрируя, получим следующее выражение для \bar{P}_Σ :

$$\bar{P}_\Sigma = \frac{W}{12\pi} (kl)^2 |\dot{I}_m^{cm}|^2, \quad (2.70)$$

или

$$\bar{P}_\Sigma = \frac{1}{2} R_\Sigma |\dot{I}_m^{cm}|^2, \quad (2.71)$$

где коэффициент

$$R_\Sigma = \frac{W}{6\pi} (kl)^2 \quad (2.72)$$

называется сопротивлением излучения элементарного электрического излучателя. По величине R_Σ можно судить об эффективности излучения. Чем больше R_Σ , тем больше излучаемая мощность при заданной амплитуде тока $|\dot{I}_m^{cm}|$. Эффективность излучения повышается с ростом частоты и увеличением длины излучателя.

ГЛАВА 3. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

3.1. Принцип суперпозиции

Электромагнитное поле, возбуждаемое несколькими источниками, можно представить в виде суммы полей, возбуждаемых каждым источником в отдельности.

Если объёмную плотность стороннего тока \dot{j}_m^{cm} можно представить в виде суммы

$$\dot{j}_m^{cm} = \dot{j}_{m1}^{cm} + \dot{j}_{m2}^{cm}, \quad (3.1)$$

то напряженность электромагнитного поля, возбуждаемого током с плотностью $\dot{\vec{J}}_{m1}^{cm}$, можно представить в виде суммы:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_{m1} + \dot{\vec{E}}_{m2}, \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{H}}_{m1} + \dot{\vec{H}}_{m2}, \quad (3.2)$$

где $\dot{\vec{E}}_{m1}, \dot{\vec{H}}_{m1}$ - напряженность поля, возбуждаемого током с плотностью $\dot{\vec{J}}_{m1}^{cm}$, а $\dot{\vec{E}}_{m2}, \dot{\vec{H}}_{m2}$ - напряженность поля, возбуждаемого током с плотностью $\dot{\vec{J}}_{m2}^{cm}$.

Принцип суперпозиции следует из линейности системы уравнений электродинамики (1.28). Эти уравнения для полей $\dot{\vec{E}}_{m1}, \dot{\vec{H}}_{m1}$ и $\dot{\vec{E}}_{m2}, \dot{\vec{H}}_{m2}$ становятся тождественными равенствами:

$$1) \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_{m1} = i\omega \dot{\vec{E}}_{m1} + \dot{\vec{J}}_{m1}^{cm}; 2) \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_{m1} = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_{m1}; \quad (3.3)$$

$$1) \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_{m2} = i\omega \dot{\vec{E}}_{m2} + \dot{\vec{J}}_{m2}^{cm}; 2) \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_{m2} = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_{m2}; \quad (3.4)$$

Складывая почленно (3.3) и (3.4), получим следующие тождественные равенства:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = i\omega \dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{J}}_m^{cm};; \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m; \quad (3.5)$$

откуда следует, что векторные функции $\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_{m1} + \dot{\vec{E}}_{m2}, \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{H}}_{m1} + \dot{\vec{H}}_{m2}$, являются решениями системы уравнений электродинамики.

Замечание. Принцип суперпозиции не распространяется на энергетические характеристики, являющиеся квадратичными характеристиками поля.

3.2 Электромагнитное поле элементарного рамочного излучателя

Воспользуемся принципом суперпозиции для нахождения электромагнитного поля рамочного излучателя, представляющего собой замкнутый проводящий контур, по которому течёт электрический ток с постоянной амплитудой и фазой. Размеры контура малы по сравнению с длиной волны λ и расстоянием r до точки наблюдения (рис. 3.1.).

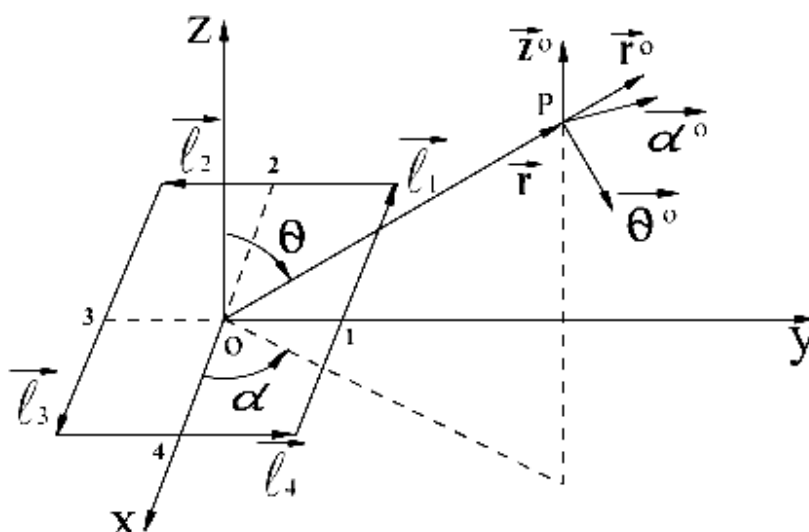


Рис.3.1.Элементарный рамочный излучатель

Для прямоугольного контура тока условия элементарности записываются в виде:

$$\text{а) } \dot{I}_m^{cm} = const ; \text{ б) } l_i \ll r ; \text{ в) } l_i \ll \lambda \quad (i=1,2,3,4). \quad (3.6)$$

Используя принцип суперпозиции, представим поле элементарного рамочного излучателя в виде суммы полей четырёх элементарных электрических излучателей, расположенных в точках 1,2,3,4 (рис.3.1.)

Используя формулу (2.23) для векторного потенциала элемента электрического тока, представим выражение для векторного потенциала элементарного рамочного излучателя в виде:

$$\vec{A}_m = \frac{\dot{I}_m^{cm}}{4\pi} \sum_{i=1}^4 \vec{l}_i \frac{e^{-i\vec{k}R_i}}{R_i}, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \vec{l}_1 &= -\vec{x}^0 l_1; \vec{l}_2 = -\vec{y}^0 l_2; \vec{l}_3 = \vec{x}^0 l_3; \vec{l}_4 = \vec{y}^0 l_4; \\ \text{где } l_1 &= l_3 = l_x; l_2 = l_4 = l_y; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$R_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}, \quad (3.9)$$

x_i, y_i, z_i - координаты точек 1,2,3,4;

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, & x_2 &= -\frac{l_x}{2}, & x_3 &= 0, & x_4 &= \frac{l_x}{2}, \\
y_1 &= \frac{l_y}{2}, & y_2 &= 0, & y_3 &= -\frac{l_y}{2}, & y_4 &= 0, \\
z_1 &= 0, & z_2 &= 0, & z_3 &= 0, & z_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Используя условие элементарности (3.6б) и представляя выражение (3.9) для R_i ($i = 1, 2, 3, 4$) в виде разложения в степенной ряд получаем:

$$\begin{aligned}
R_1 &= r - \frac{1}{2} \frac{y}{r} l_y; & R_2 &= r + \frac{1}{2} \frac{x}{r} l_x; \\
R_3 &= r + \frac{1}{2} \frac{y}{r} l_y; & R_4 &= r - \frac{1}{2} \frac{x}{r} l_x; \\
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Подставляя (3.8), (3.10) в (3.7), разлагая функцию e^{-ikR} в степенной ряд, используя при этом условие элементарности (3.6в), получим следующее выражение для векторного потенциала:

$$\dot{\vec{A}}_m = \frac{\dot{I}_m^{cm} \dot{k} l_x l_y}{4\pi} \left(-\vec{x}^\circ \frac{y}{r} + \vec{y}^\circ \frac{x}{r} \right) \left(i + \frac{1}{\dot{k}r} \right) \frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{3.11}$$

Используя соотношения связи декартовых и сферических координат $x = r \sin \theta \cos \alpha$, $y = r \sin \theta \sin \alpha$ и учитывая при этом, что $\vec{\alpha}^\circ = \vec{y}^\circ \cos \alpha - \vec{x}^\circ \sin \alpha$, приведём выражение (3.11) к виду:

$$\dot{\vec{A}}_m = \vec{\alpha}^\circ \frac{\dot{I}_m^{cm} \dot{k} S}{4\pi} \sin \theta \left(i + \frac{1}{\dot{k}r} \right) \frac{e^{-ikr}}{r}, \tag{3.12}$$

где $S = l_x l_y$ - площадь, ограниченная контуром рамки.

Так как векторная функция $\dot{\vec{A}}_m$, определяемая выражением (3.12), имеет только одну α -вую составляющую, не зависящую от угла α , то $\text{div } \dot{\vec{A}}_m = 0$. Учитывая это обстоятельство, из формулы (2.9) получим следующее выражение для напряжённости электрического поля $\dot{\vec{E}}_m$:

$$\dot{\vec{E}}_m = \frac{\dot{k}^2}{i\omega\dot{\varepsilon}_a} \dot{\vec{A}}_m = -i\vec{\alpha}^0 \frac{\dot{I}_m^{cm} \dot{k}^2 S}{4\pi} \dot{W} \sin \theta \left(i + \frac{1}{\dot{k}r} \right) \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (3.13)$$

Сравнивая это выражение с выражением (2.53), видим, что напряжённость электрического поля элементарного рамочного излучателя с точностью до постоянного множителя совпадает с напряжённостью магнитного поля элементарного электрического излучателя, момент которого перпендикулярен плоскости рамки.

При этом равенство полей получим, когда $\dot{\vec{P}}_m^{cm\mathcal{E}} = -\dot{\vec{P}}_m^{cmP}$, где $\dot{\vec{P}}_m^{cm\mathcal{E}} = \dot{I}_m^{cm} \vec{l}$ - момент элементарного электрического излучателя, а $\dot{\vec{P}}_m^{cmP} = i\dot{k}\dot{W}\dot{I}_m^{cmP} \vec{S}$ - момент элементарного рамочного излучателя, причём $\vec{l} \perp \vec{S}$.

Напряжённость магнитного поля элементарного рамочного излучателя находим из второго уравнения электродинамики (1.28):

$$\dot{\vec{H}}_m = \frac{rot \dot{\vec{E}}_m}{-i\omega\mu_a} = \frac{\dot{\varepsilon}_a}{\mu_a} \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}} \bigg|_{\dot{\vec{P}}_m^{cm\mathcal{E}} = -\dot{\vec{P}}_m^{cmP}}, \quad (3.14)$$

где $\dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}}$ - напряжённость электрического поля элементарного электрического излучателя.

Запишем выражения для полей в дальней зоне элементарного рамочного излучателя:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m &= \vec{\alpha}^0 \frac{\dot{I}_m^{cm} \dot{k}^2 S}{4\pi} \dot{W} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r} \\ \dot{\vec{H}}_m &= -\vec{\theta}^0 \frac{\dot{I}_m^{cm} \dot{k}^2 S}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из этих выражений видно, что поле в дальней зоне представляет сферическую волну, распространяющуюся в радиальных направлениях из начала координат. При этом векторы поля связаны между собой соотношениями:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{W} \left[\dot{\vec{H}}_m \vec{r}^\circ \right], \quad \dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{\dot{W}} \left[\vec{r}^\circ \dot{\vec{E}}_m \right]. \quad (3.16)$$

$$\dot{\vec{A}}_m = \left[\vec{r}^\circ \dot{F}_r(\theta, \alpha) + \vec{\theta}^\circ \dot{F}_\theta(\theta, \alpha) + \vec{\alpha}^\circ \dot{F}_\alpha(\theta, \alpha) \right] \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (3.17a)$$

Используя формулы (2.7), (2.9), в которых операторы rot, div, grad представляются в сферической системе координат, устремляя $r \rightarrow \infty$, получим следующие выражения для полей $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$:

$$\dot{\vec{E}}_m = -ik\dot{W}\dot{\vec{A}}_{m\perp}; \quad \dot{\vec{H}}_m = -ik \left[\vec{r}^\circ \dot{\vec{A}}_{m\perp} \right], \quad (3.17б)$$

где $\dot{\vec{A}}_{m\perp} = \vec{\theta}^\circ \dot{A}_{m\theta} + \vec{\alpha}^\circ \dot{A}_{m\alpha}$ - поперечная (относительно радиуса-вектора \vec{r}) составляющая векторного потенциала.

Формулы (3.17б) позволяют наиболее просто определить поле в дальней зоне через векторный потенциал. Кроме того, из них непосредственно следуют соотношения (3.17), выражающие принцип излучения на бесконечности, смысл которого можно выразить следующим образом: если полученные в результате решения уравнений электродинамики задачи поля в дальней зоне удовлетворяют условию (3.17), значит получено решение электродинамической задачи в классе полей, убывающих на бесконечности как $\frac{1}{r}$, что соответствует случаю отсутствия поглощения ($\sigma = 0$).

Замечание. Наряду с решением (2.22) для векторного потенциала элемента электрического тока и (2.50) для элементарного электрического излучателя существует другое решение:

$$A \quad \dot{\vec{A}}_m = \vec{z}^\circ \frac{\dot{I}_m^{cm} l}{4\pi} \frac{e^{+ikr}}{r}, \quad (3.18)$$

которое при отсутствии потерь ($\sigma = 0$) тоже убывает на бесконечности как $\frac{1}{r}$, однако при этом не удовлетворяется условие излучения на бесконечности (3.17). Если же $\sigma \neq 0$, то решение (3.18) при $r \rightarrow \infty$ возрастает по закону $\frac{e^{k^*r}}{r}$ и, следовательно, не имеет физического смысла.

3.4. Принцип взаимности

Принцип взаимности устанавливает связь между полями двух систем источников, работающих на одной частоте в линейной изотропной среде с параметрами $\varepsilon_a, \mu_a, \sigma$.

Пусть первая система источников, характеризуемая объёмной плотностью тока $\dot{\mathbf{j}}_{m1}^{ct}$, расположена в области V_1 , а вторая, характеризуемая объёмной плотностью тока $\dot{\mathbf{j}}_{m2}^{ct}$, расположена в области V_2 , и пусть области V_1 и V_2 не пересекаются (рис. 3.3.).

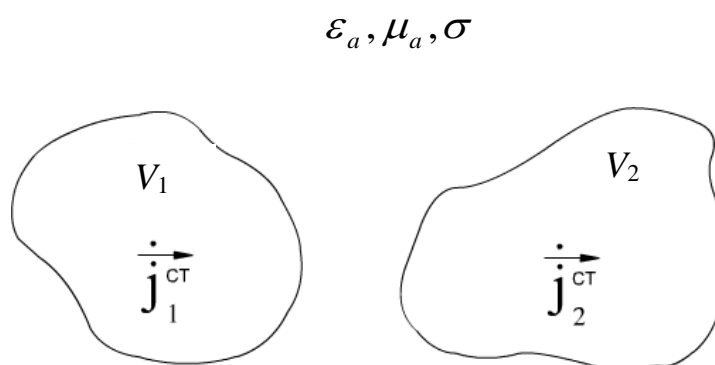


Рис. 3.3. Две системы источников в линейной изотропной среде

Электромагнитные поля токов с плотностями $\dot{\mathbf{j}}_{m1}^{ct}$ и $\dot{\mathbf{j}}_{m2}^{ct}$ характеризуются напряжённостями $\dot{\mathbf{E}}_{m1}, \dot{\mathbf{H}}_{m1}$ и $\dot{\mathbf{E}}_{m2}, \dot{\mathbf{H}}_{m2}$, соответственно.

Эти поля и токи связаны между собой соотношением

$$\int_{V_1} \dot{\mathbf{j}}_{m1}^{ct} \dot{\mathbf{E}}_{m2} dv = \int_{V_2} \dot{\mathbf{j}}_{m2}^{ct} \dot{\mathbf{E}}_{m1} dv, \quad (3.19)$$

представляющим собой математическую формулировку принципа взаимности.

Из принципа взаимности следует, что условия передачи электромагнитной энергии в прямом и обратном направлении совершенно одинаковы.

Соотношение (3.19) в случае двух элементарных электрических излучателей с моментами $\vec{P}_{m1}^{cm} = \dot{I}_{m1}^{cm} \vec{l}_1$ и $\vec{P}_{m2}^{cm} = \dot{I}_{m2}^{cm} \vec{l}_2$ принимает вид $\dot{\vec{P}}_{m1}^{cm} \dot{\vec{E}}_{m2} = \dot{\vec{P}}_{m2}^{cm} \dot{\vec{E}}_{m1}$. Причём, если $\dot{\vec{P}}_{m1}^{cm} = \dot{\vec{P}}_{m2}^{cm}$, то

$$\dot{\vec{E}}_{m1} = \dot{\vec{E}}_{m2} \quad (3.20)$$

В частности, из (3.20) следует, что если измерить поле \vec{E}_{12} в произвольной точке 2 линейной изотропной среды, возбуждаемое излучателем, находящимся в другой произвольной точке 1, а затем перенести излучатель параллельно в точку 2 и измерить поле \vec{E}_{21} в точке 1, то окажется, что $\vec{E}_{12} = \vec{E}_{21}$.

Принцип взаимности широко используется при решении дифракционных задач.

На основе принципа взаимности, из которого следует, что диаграмма направленности антенны в режиме передачи и приёма одинакова, построена современная теория приёмных антенн.

Доказательство принципа взаимности

Запишем уравнения электродинамики для двух систем источников:

$$\begin{cases} a) \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_{m1} = i\omega \dot{\vec{\epsilon}}_a \dot{\vec{E}}_{m1} + \dot{\vec{j}}_{m1}^{cm} \\ б) \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_{m1} = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_{m1} \end{cases} \begin{cases} в) \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_{m2} = i\omega \dot{\vec{\epsilon}}_a \dot{\vec{E}}_{m2} + \dot{\vec{j}}_{m2}^{cm} \\ г) \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_{m2} = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_{m2} \end{cases} \quad (3.21)$$

Рассмотрим попарно уравнения а), г) и б), в).

Умножим обе части уравнения а) скалярно на вектор $\dot{\vec{E}}_{m2}$, обе части уравнения г) – на вектор $\dot{\vec{H}}_{m1}$ и вычитаем а) из г). Используя при этом тождество (1.25), получим:

$$\operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_{m2} \dot{\vec{H}}_{m1} \right] = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_{m2} \dot{\vec{H}}_{m1} - i\omega \dot{\vec{\epsilon}}_a \dot{\vec{E}}_{m1} \dot{\vec{E}}_{m2} - \dot{\vec{j}}_{m1}^{cm} \dot{\vec{E}}_{m2}. \quad (3.22)$$

Аналогично, умножим обе части уравнения в) скалярно на вектор $\dot{\vec{E}}_{m1}$, обе части уравнения б) – на вектор $\dot{\vec{H}}_{m2}$ и вычтем в) из б). В результате получим:

$$\operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_{m1} \dot{\vec{H}}_{m2} \right] = -i\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_{m1} \dot{\vec{H}}_{m2} - i\omega\epsilon_a \dot{\vec{E}}_{m2} \dot{\vec{E}}_{m1} - \dot{j}_{m2}^{cm} \dot{\vec{E}}_{m1}. \quad (3.23)$$

Вычитая почленно (3.22) из (3.23), получим:

$$\operatorname{div} \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_{m1} \dot{\vec{H}}_{m2} \right] - \left[\dot{\vec{E}}_{m2} \dot{\vec{H}}_{m1} \right] \right\} = \dot{j}_{m1}^{cm} \dot{\vec{E}}_{m2} - \dot{j}_{m2}^{cm} \dot{\vec{E}}_{m1}. \quad (3.24)$$

Соотношение (3.24) устанавливает связь двух сторонних токов с возбуждаемыми ими полями и представляет математическую формулировку леммы Лоренца в дифференциальной форме.

Интегрируя обе части соотношения (3.24) по произвольной области V и применяя к интегралу в левой части теорему Остроградского-Гаусса (1.10а), получим математическую формулировку леммы Лоренца в интегральной форме:

$$\oint_S \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_{m1} \dot{\vec{H}}_{m2} \right] - \left[\dot{\vec{E}}_{m2} \dot{\vec{H}}_{m1} \right] \right\} \vec{ds} = \int_V \left[\left(\dot{j}_{m1}^{cm} \dot{\vec{E}}_{m2} \right) - \left(\dot{j}_{m2}^{cm} \dot{\vec{E}}_{m1} \right) \right] dV. \quad (3.25)$$

Если распространить интегрирование в (3.25) на всё бесконечное пространство, то поверхностный интеграл в левой части обратится в ноль в силу принципа излучения на бесконечности (3.17). Если при этом области V_1 и V_2 не пересекаются (рис.3.3.), то из (3.25) непосредственно следует соотношение (3.19), выражающее принцип взаимности.

3.5. Принцип двойственности

Принцип двойственности позволяет найти электромагнитное поле, возбуждаемое сторонними магнитными токами, если известно электромагнитное поле, возбуждаемое сторонними электрическими токами. Сторонние магнитные токи формально вводятся во второе уравнение электродинамики (формально, так как в природе нет магнитных зарядов, а следовательно, и магнитных токов). При этом система (1.28) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m &= i\omega \dot{\vec{\varepsilon}}_a \dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_m^{cm} \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m &= -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m - \dot{\vec{j}}_m^{M.cm} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Распределение сторонних магнитных токов в пространстве характеризуется объёмной плотностью $\dot{\vec{j}}_m^{M.cm}$.

Формальное введение магнитных токов упрощает решение некоторых задач электродинамики.

Так с помощью принципа двойственности можно получить выражения для характеристик электромагнитного поля элементарного рамочного и элементарного щелевого излучателей, которые являются физическими реализациями элементарного магнитного излучателя.

Используя принцип суперпозиции, представим решение системы (3.26) в виде суммы:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{O}} + \dot{\vec{E}}_m^M; \quad \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{O}} + \dot{\vec{H}}_m^M, \quad (3.27)$$

где $\dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{O}}, \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{O}}$ - характеристики электромагнитного поля, возбуждаемого сторонними электрическими токами, удовлетворяющие системе уравнений электродинамики (3.26) при $\dot{\vec{j}}_m^{M.cm} = 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{O}} &= i\omega \dot{\vec{\varepsilon}}_a \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{O}} + \dot{\vec{j}}_m^{cm}, \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{O}} &= -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{O}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

$\dot{\vec{E}}_m^M, \dot{\vec{H}}_m^M$ - характеристики электромагнитного поля, возбуждаемого сторонними магнитными токами, удовлетворяющие системе уравнений электродинамики (3.26) при $\dot{\vec{j}}_m^{CT} = 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m^M &= i\omega \dot{\vec{\varepsilon}}_a \dot{\vec{E}}_m^M, \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m^M &= -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m^M - \dot{\vec{j}}_m^{M.cm}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Если известно решение системы (3.28), то решение системы (3.29) может быть получено из решения системы (3.28) с помощью принципа двойственности, математическая формулировка которого выражается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_m^M &= -H_m^\vartheta \Big|_{\dot{j}_m^{cm} \rightarrow \dot{j}_m^{M.cm}}, \\ \dot{\vec{H}}_m^M &= \frac{\dot{\varepsilon}_a}{\mu_a} \dot{\vec{E}}_m^\vartheta \Big|_{\dot{j}_m^{cm} \rightarrow \dot{j}_m^{M.cm}};\end{aligned}\quad (3.30)$$

Подставляя выражения (3.30) в систему (3.29) и учитывая, что правые части выражений (3.30) являются решениями системы (3.28), убеждаемся, что в результате каждое из уравнений системы (3.29) обращается в тождественное равенство, что доказывает правильность соотношений (3.30), выражающих принцип двойственности.

3.6. Электромагнитное поле элементарного магнитного излучателя.

Элементарный магнитный излучатель – это элемент линейного магнитного тока, характеризующийся моментом:

$$\dot{\vec{P}}_m^{M.cm} = \int_{V \rightarrow 0} \dot{j}_m^{M.cm} dv' = \dot{I}_m^{M.cm} \cdot l^M \cdot \vec{l}^0 = const, \quad (3.31)$$

где \vec{l}^0 - единичный вектор, указывающий направление плотности стороннего магнитного тока $\dot{j}_m^{M.cm}$; l^M - длина элемента магнитного тока.

Рассмотрим элементарный магнитный излучатель, расположенный в начале сферической системы координат и направленный вдоль полярной оси z (рис. 3.4.). Согласно принципу двойственности, характеристики поля элементарного магнитного излучателя можно определить, используя соотношения (3.30), где $\dot{\vec{H}}_m^\vartheta$ и $\dot{\vec{E}}_m^\vartheta$ - характеристики поля элементарного электрического излучателя с моментом

$$\dot{\vec{P}}_m^{cm} = \int_{V \rightarrow 0} \dot{j}_m^{cm} dv' = \dot{I}_m^{cm} \vec{l}. \quad (3.32)$$

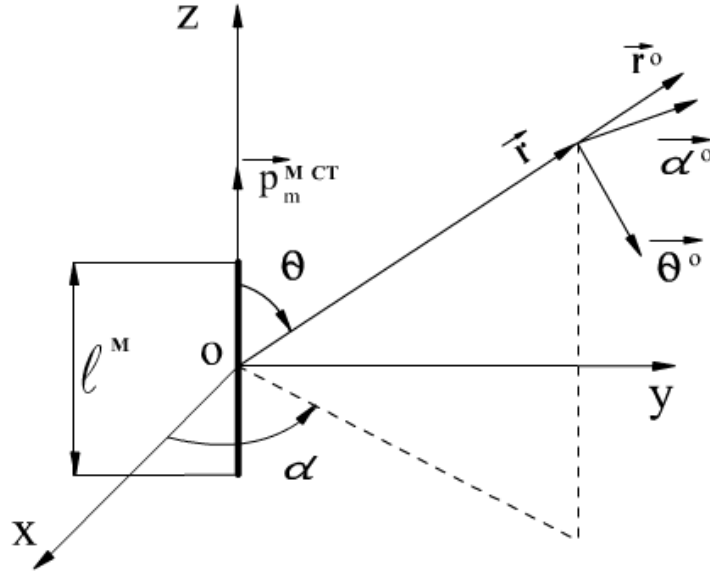


Рис. 3.4. Элементарный магнитный излучатель.

Подставляя в соотношения (3.30) выражения (2.53) и (2.54) и делая в них замену $\dot{\vec{P}}_m^{cmT} = \dot{I}_m^{cm} \vec{l}$ на $\dot{\vec{P}}_m^{M.cm} = \dot{I}_m^{M.cm} \vec{l}^M$, получим выражения для полей $\dot{\vec{E}}_m^M$ и $\dot{\vec{H}}_m^M$ элементарного магнитного излучателя. Для дальней зоны эти выражения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m^M &= -\alpha^\circ i \frac{\dot{I}_m^{M.cm} \dot{k} \cdot l^M}{4\pi} \cdot \sin \theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}, \\ \dot{\vec{H}}_m^M &= \bar{\theta}^\circ i \frac{\dot{I}_m^{M.cm} \dot{k} \cdot l^M}{4\pi} \cdot \frac{1}{\dot{W}} \cdot \sin \theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Сравнивая эти выражения с выражениями для поля элементарного рамочного излучателя (3.15), видим, что они совпадают при

$$\dot{I}_m^{M.cm} \cdot l^M = i\dot{k} \cdot \dot{W} \cdot \dot{I}_m^{cm} \cdot S, \quad (3.34)$$

где \dot{I}_m^{cm} - ток в рамке, S - площадь, ограниченная контуром рамки.

Таким образом, элементарный рамочный излучатель является физической реализацией элементарного магнитного излучателя, причём их моменты связаны соотношением:

$$\dot{\vec{P}}_m^{cm.P} = i\dot{k} \cdot \dot{W} \cdot \dot{I}_m^{cm} \cdot \vec{S} = \dot{\vec{P}}_m^{M.cm} = \dot{I}_m^{M.cm} \cdot \vec{l}^M. \quad (3.35)$$

3.7. Электромагнитное поле элементарного щелевого излучателя.

Элементарный щелевой излучатель представляет собой узкую короткую щель, прорезанную в бесконечной идеально проводящей плоскости (рис.3.5.а). К краям щели приложено напряжение стороннего источника, создающее в щели поперечное электрическое поле.

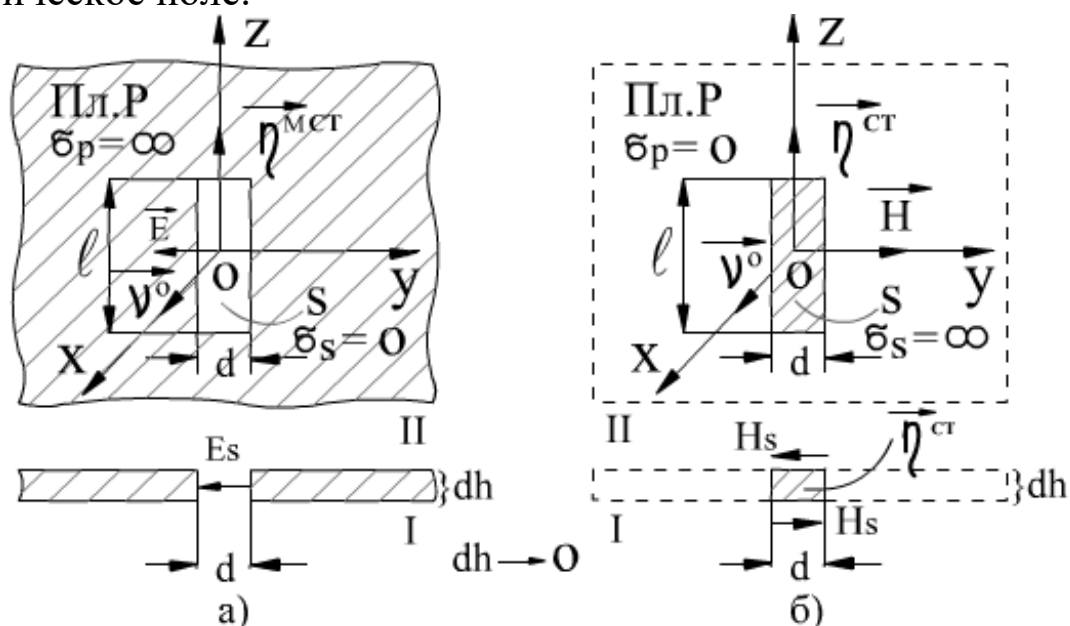


Рис. 3.5. Элементарные щелевой и электрический излучатели.

Электродинамическая задача о поле элементарного щелевого излучателя ставится следующим образом: требуется найти характеристики электромагнитного поля $\dot{\vec{E}}_m^M$ и $\dot{\vec{H}}_m^M$ в полупространстве I перед проводящей плоскостью ($x > 0$) при заданных граничных условиях на плоскости $x = 0$.

В области $x > 0$ электромагнитное поле удовлетворяет однородной системе уравнений электродинамики (системе (3.26) при $\dot{\vec{j}}_m^{cm} = 0$ и $\dot{\vec{j}}_m^{M.cm} = 0$):

$$\begin{aligned} \text{rot} \dot{\vec{H}}_m^M &= i\omega \dot{\vec{E}}_m^M, \\ \text{rot} \dot{\vec{E}}_m^M &= -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m^M, \end{aligned} \quad (3.36)$$

и граничным условиям при $x = 0$:

$$a) \vec{E}_\tau|_P = 0; \quad б) \vec{E}_\tau|_S = -\vec{y}^\circ E_S. \quad (3.37)$$

Поставленная задача является двойственным аналогом задачи о поле элементарного электрического излучателя в виде бесконечно тонкого полоскового проводника S с током (рис.3.5.б).

Поля $\dot{\vec{E}}_m^\vartheta$, $\dot{\vec{H}}_m^\vartheta$ в этом случае являются решением однородной системы уравнений электродинамики

$$\begin{aligned} \text{rot} \dot{\vec{H}}_m^\vartheta &= i\omega \dot{\vec{E}}_m^\vartheta; \\ \text{rot} \dot{\vec{E}}_m^\vartheta &= -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m^\vartheta, \end{aligned} \quad (3.38)$$

и удовлетворяют граничным условиям при $x=0$:

$$a) \vec{H}_\tau|_P = 0, \quad б) \vec{H}_\tau|_S = \vec{y}^\circ H_S. \quad (3.39)$$

Выражения для полей элементарного электрического излучателя в дальней зоне определяются выражениями (2.55):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_m^\vartheta &= \vec{\alpha}^0 i \frac{\dot{I}_m^{cm} \vec{k} \cdot \vec{l}}{4\pi} \cdot \sin \theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}, \\ \dot{\vec{E}}_m^\vartheta &= \vec{\theta}^0 i \frac{\dot{I}_m^{cm} \vec{k} \cdot \vec{l}}{4\pi} \cdot \dot{W} \cdot \sin \theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Используя граничное условие (1.22), выразим ток \dot{I}_m^{cm} через плотность тока $\dot{\vec{\eta}}_m^{cm}$:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\eta}}_m^{cm} &= \left[\vec{v}^\circ \left(\dot{\vec{H}}_{m1} - \dot{\vec{H}}_{m2} \right) \right] = \vec{z}^\circ 2\dot{H}_{mS} \\ \dot{I}_m^{cm} &= \int_{y'=-d/2}^{d/2} \dot{\eta}_m^{cm} dy' = 2 \int_{y'=-d/2}^{d/2} \dot{H}_{mS} dy'. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Решение задачи (3.36), (3.37) получим из решения задачи (3.38), (3.39) по формулам:

$$\dot{\vec{E}}_m^M = -\dot{\vec{H}}_m^\vartheta \Big|_{\dot{H}_{mS} \rightarrow \dot{E}_{mS}}; \quad \dot{\vec{H}}_m^M = \frac{\dot{\vec{E}}_a}{\mu_a} \dot{\vec{E}}_m^\vartheta \Big|_{\dot{H}_{mS} \rightarrow \dot{E}_{mS}}. \quad (3.42)$$

Запишем выражение для полей элементарного щелевого излучателя в дальней зоне, используя выражения (3.40), (3.41), (3.42):

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_m^M &= -\vec{\alpha}^\circ i \frac{2\dot{I}_m^{M.cm} \dot{k} \cdot l}{4\pi} \cdot \sin \theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \\ \dot{\vec{H}}_m^M &= \theta^\circ i \frac{2\dot{I}_m^{M.cm} \dot{k} \cdot l}{4\pi} \cdot \frac{1}{\dot{W}} \cdot \sin \theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}\end{aligned}\quad (3.43)$$

где

$$I_m^{M.cm} = \int_{y'=-d/2}^{d/2} \dot{E}_{mS} dy'. \quad (3.44)$$

Сравнивая выражения (3.43) с выражениями для поля элементарного магнитного излучателя (3.33), видим, что они совпадают при

$$\dot{I}_m^{M.cm} \cdot l^M = 2l \int_{y'=-d/2}^{d/2} \dot{E}_{mS} dy'. \quad (3.45)$$

Таким образом, элементарный щелевой излучатель является физической реализацией элементарного магнитного излучателя с моментом:

$$\dot{\vec{P}}_m^{M.cm} = 2\vec{l} \int_{y'=-d/2}^{d/2} \dot{E}_{mS} dy' = 2\dot{U}_{mS} \vec{l}, \quad (3.46)$$

где \dot{U}_{mS} - напряжение в щели.

3.8. Принцип эквивалентности

Принцип эквивалентности позволяет определить электромагнитное поле вне поверхности S , охватывающей область сторонних источников, через эквивалентные поверхностные токи, распределённые на этой поверхности.

Пусть сторонние токи распределены в области V' с объёмной плотностью $\dot{\vec{j}}_m^{CT}$, а поверхность S , охватывающая область V' , делит всё пространство на области I и II (рис. 3.6.), причём область I – произвольная, а область II представляет линейную, изотропную, однородную среду, характеризуемую параметрами $\varepsilon = const$, $\mu = const$, $\sigma = const$; \vec{v}° - единичный вектор нормали в каждой точке поверхности S .

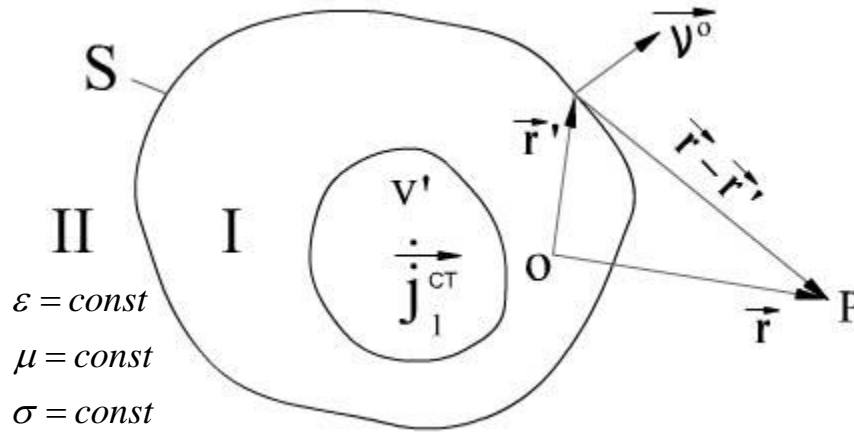


Рис.3.6. К трактовке принципа эквивалентности.

На поверхности S заданы поверхностные плотности эквивалентных электрических $\dot{\vec{\eta}}_m^{\text{ЭKB.Э}}$ и магнитных $\dot{\vec{\eta}}_m^{\text{ЭKB.М}}$ токов, выражающиеся через тангенциальные составляющие напряжённости магнитного и электрического поля:

$$\dot{\vec{\eta}}_m^{\text{ЭKB.Э}} = \left[\vec{v}^0 \cdot \dot{\vec{H}}_m \right]_S, \quad (3.47)$$

$$\dot{\vec{\eta}}_m^{\text{ЭKB.М}} = - \left[\vec{v}^0 \cdot \dot{\vec{E}}_m \right]_S. \quad (3.48)$$

Требуется определить поля $\dot{\vec{E}}_m(\vec{r})$ и $\dot{\vec{H}}_m(\vec{r})$ в произвольной точке P области II на расстоянии r от начала координат.

Искомые поля удовлетворяют однородной системе уравнений электродинамики (системе (3.25) при $\dot{\vec{j}}_m^{cm} = 0, \dot{\vec{j}}_m^{M.cm} = 0$):

$$\text{rot} \dot{\vec{H}}_m = i\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_m; \quad \text{rot} \dot{\vec{E}}_m = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m \quad (3.49)$$

и граничным условиям (3.47), (3.48).

Представим решение системы (3.49) в виде суммы:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_m^{\text{Э}} + \dot{\vec{E}}_m^{\text{М}}; \quad \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{H}}_m^{\text{Э}} + \dot{\vec{H}}_m^{\text{М}}, \quad (3.50)$$

где поля $\dot{\vec{E}}_m^{\text{Э}}, \dot{\vec{H}}_m^{\text{Э}}$ и $\dot{\vec{E}}_m^{\text{М}}, \dot{\vec{H}}_m^{\text{М}}$ удовлетворяют однородной системе уравнений электродинамики и определяются из решения «электрической» и «магнитной» задач.

Для «электрической» задачи нужно найти решение однородной системы электродинамики:

$$rot \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}} = i\omega \dot{\vec{\varepsilon}}_a \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}}; \quad rot \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}} = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}}, \quad (3.51)$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$a) \left[\vec{\nu}^{\circ} \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}} \right] \Big|_S = 0, \quad б) \left[\vec{\nu}^{\circ} \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}} \right] \Big|_S = \dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.\mathcal{E}}(\vec{r}'). \quad (3.52)$$

Для «магнитной» задачи нужно найти решение однородной системы электродинамики:

$$rot \dot{\vec{H}}_m^M = i\omega \dot{\vec{\varepsilon}}_a \dot{\vec{E}}_m^M; \quad rot \dot{\vec{E}}_m^M = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m^M, \quad (3.53)$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$a) \left[\vec{\nu}^{\circ} \dot{\vec{H}}_m^M \right] \Big|_S = 0, \quad б) - \left[\vec{\nu}^{\circ} \dot{\vec{E}}_m^M \right] \Big|_S = \dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.M}. \quad (3.54)$$

Решение «электрической» задачи.

Так как тангенциальная составляющая напряжённости электрического поля на поверхности S равна нулю (3.52.а), то при решении этой задачи поверхность S можно рассматривать как поверхность идеального проводника, по которой течёт поверхностный ток с плотностью $\dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.\mathcal{E}}(\vec{r}')$ (3.52.б).

Используя формулу (2.25), запишем выражение для векторного потенциала $\dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}}$ этого тока:

$$\dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}} = \oint_S \dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.\mathcal{E}}(\vec{r}') \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} ds', \quad (3.55)$$

где $\dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.\mathcal{E}} = \left[\vec{\nu}^{\circ} \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}} \right] \Big|_S$.

Напряжённость магнитного и электрического поля выражается через векторный потенциал по формулам (2.7), (2.9):

$$a) \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}} = rot \dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}}; \quad б) \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}} = \frac{1}{i\omega \dot{\vec{\varepsilon}}_a} \left(grad \, div \dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}} + k^2 \dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}} \right). \quad (3.56)$$

Решение «магнитной» задачи.

Эта задача является двойственным аналогом предыдущей, и её решение можно представить через векторный потенциал (3.55) в виде (3.56), производя замены:

$$\dot{\vec{E}}_m^M = -\dot{\vec{H}}_m^\mathcal{E}; \quad \dot{\vec{H}}_m^M = \frac{\dot{\vec{\varepsilon}}_a}{\mu_a} \dot{\vec{E}}_m^\mathcal{E}; \quad \dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.\mathcal{E}} \rightarrow \dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.M}. \quad (3.57)$$

В результате получим следующие выражения для векторного потенциала $\dot{\vec{A}}_m^M$ и напряженности поля $\dot{\vec{E}}_m^M$ и $\dot{\vec{H}}_m^M$:

$$\dot{\vec{A}}_m^M = \oint_S \dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.M}(\vec{r}') \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} ds', \quad (3.58)$$

$$\text{где } \dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.M} = -\left[\vec{v}^\circ \dot{\vec{E}}_m\right]_S;$$

$$a) \dot{\vec{E}}_m^M = -\text{rot} \dot{\vec{A}}_m^M; \quad б) \dot{\vec{H}}_m^M = \frac{1}{i\omega\mu_a} \left(\text{grad div} \dot{\vec{A}}_m^M + k^2 \dot{\vec{A}}_m^M \right). \quad (3.59)$$

3.9. Электромагнитное поле элемента Гюйгенса.

Выражения (3.55), (3.58) можно представить в виде $\dot{\vec{A}}_m^\mathcal{E} = \oint_S d\dot{\vec{A}}_m^\mathcal{E}$

и $\dot{\vec{A}}_m^M = \oint_S d\dot{\vec{A}}_m^M$, где $d\dot{\vec{A}}_m^\mathcal{E}$ и $d\dot{\vec{A}}_m^M$ - векторные потенциалы

элементарного поверхностного источника, представляющего собой элемент поверхности, на которой заданы тангенциальные составляющие напряжённости электрического и магнитного полей, через которые выражаются поверхностные плотности эквивалентного электрического $\dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.\mathcal{E}}$ и магнитного $\dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.M}$ тока.

Если элемент поверхности ds представляет собой элементарный участок фронта сферической (локально плоской) волны, то в этом случае элементарный поверхностный источник называют элементом Гюйгенса. Векторы напряжённости электрического и магнитного полей на элементе Гюйгенса связаны между собой соотношениями (3.16):

(3.61), (3.62), получим выражения для электрического $\dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}\Gamma}$ и магнитного $\dot{\vec{A}}_m^{M\Gamma}$ векторных потенциалов элемента Гюйгенса:

$$\dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}\Gamma} = -\vec{x}^\circ \frac{\dot{E}_\circ}{\dot{W}} \cdot \frac{ds}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (3.63)$$

$$\dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}M} = -\vec{y}^\circ \dot{E}_\circ \cdot \frac{ds}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (3.64)$$

Представим поле элемента Гюйгенса в виде суммы:

$$a) \dot{\vec{E}}_m^{\Gamma} = \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}\Gamma} + \dot{\vec{E}}_m^{M\Gamma} \quad б) \dot{\vec{H}}_m^{\Gamma} = \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}\Gamma} + \dot{\vec{H}}_m^{M\Gamma}. \quad (3.65)$$

Далее, ограничиваясь определением полей в дальней зоне, в соответствии с принципом излучения на бесконечности, используя (3.17б), представим $\dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}\Gamma}$ в виде:

$$\dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}\Gamma} = -ik\dot{W}\dot{\vec{A}}_{m\perp}^{\mathcal{E}\Gamma}. \quad (3.66)$$

Используя (3.59.а), представим $\dot{\vec{E}}_m^{M\Gamma}$ в виде:

$$\dot{\vec{E}}_m^{M\Gamma} = ik \left[\vec{r}^\circ \dot{\vec{A}}_{m\perp}^{M\Gamma} \right]. \quad (3.67)$$

Представляя единичные векторы $\vec{x}^\circ, \vec{y}^\circ$, входящие в выражения (3.63), (3.64), в виде разложения по ортам сферической системы координат:

$$\begin{aligned} a) \vec{x}^\circ &= (\vec{r}^\circ \sin \theta + \vec{\theta}^\circ \cos \theta) \cos \alpha - \vec{\alpha}^\circ \sin \alpha, \\ б) \vec{y}^\circ &= (\vec{r}^\circ \sin \theta + \vec{\theta}^\circ \cos \theta) \sin \alpha + \vec{\alpha}^\circ \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.68)$$

преобразуем выражения (3.66), (3.67) к виду:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}\Gamma} &= ik\dot{W} \frac{E_\circ}{\dot{W}} \cdot \frac{ds}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot (\vec{\theta}^\circ \cos \theta \cos \alpha - \vec{\alpha}^\circ \sin \alpha) \\ \dot{\vec{E}}_m^{M\Gamma} &= -ik\dot{E}_\circ \cdot \frac{ds}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \left[\vec{r}^\circ (\vec{\theta}^\circ \cos \theta \sin \alpha + \vec{\alpha}^\circ \cos \alpha) \right] = \\ &= -ik\dot{E}_\circ \cdot \frac{ds}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot (\vec{\alpha}^\circ \cos \theta \sin \alpha - \vec{\theta}^\circ \cos \alpha). \end{aligned}$$

Используя (3.65), получим следующее выражение для напряжённости электрического поля элемента Гюйгенса в дальней зоне:

$$\dot{\vec{E}}_m^{\Gamma} = \dot{\vec{E}}_m^{\text{ЭГ}} + \dot{\vec{E}}_m^{\text{МГ}} = i \frac{\dot{\vec{E}}_0 \cdot \vec{k} \cdot d\vec{s}}{4\pi} (1 + \cos \theta) \cdot (\vec{\theta}^\circ \cos \alpha - \vec{\alpha}^\circ \sin \alpha) \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (3.69)$$

Выражение для напряжённости магнитного поля элемента Гюйгенса в дальней зоне получим, используя формулу (3.17):

$$\dot{\vec{H}}_m^{\Gamma} = \frac{1}{\dot{W}} \left[\vec{r}^\circ \cdot \dot{\vec{E}}_m^{\Gamma} \right] = i \frac{\dot{\vec{E}}_0 \cdot \vec{k} \cdot d\vec{s}}{4\pi \dot{W}} (1 + \cos \theta) \cdot (\vec{\theta}^\circ \sin \alpha + \vec{\alpha}^\circ \cos \alpha) \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (3.70)$$

Диаграмма направленности элемента Гюйгенса в меридиональной плоскости представляет собой кривую,

описываемую уравнением $r = \frac{E_m(\theta)}{E_{m\max}} = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$. Эта

кривая называется кардиоидой (рис.3.8.). Излучение максимально в направлении распространения волны ($\theta = 0$), элементарный участок фронта которой представляет собой рассматриваемый элемент Гюйгенса. В обратном направлении ($\theta = 180^\circ$) излучение отсутствует.

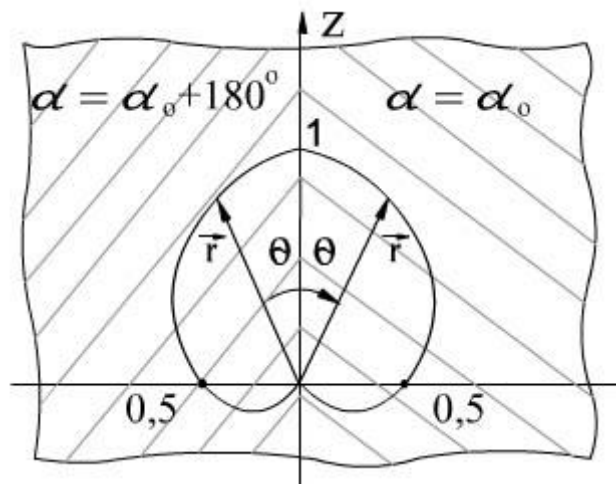


Рис.3.8. Диаграмма направленности элемента Гюйгенса.

3.10. Излучение участка фронта плоской однородной волны

В качестве примера применения принципа эквивалентности рассмотрим нормальное падение плоской однородной волны из полупространства $z < 0$

на идеально проводящий экран S с отверстием произвольной формы S_0 (рис.3.9.).

Представим выражения для поля падающей волны в виде:

$$\vec{E}_m^0 = \vec{x}^0 \dot{E}_0 e^{-ik_0 z}, \quad \vec{H}_m^0 = \vec{y}^0 \frac{\dot{E}_0}{W_0} e^{-ik_0 z}. \quad (3.71)$$

Используя принцип эквивалентности определим поле в полупространстве $z > 0$, считая, что на теневой стороне экрана, обращенной в это полупространство, поле равно нулю, а в раскрыве отверстия S_0 равно полю падающей волны:

$$\vec{E}_m^{S_0} = \vec{E}_m^0 \Big|_{z=0} = \vec{x}^0 \dot{E}_0; \quad \vec{H}_m^{S_0} = \vec{H}_m^0 \Big|_{z=0} = \vec{y}^0 \frac{\dot{E}_0}{W_0}. \quad (3.72)$$

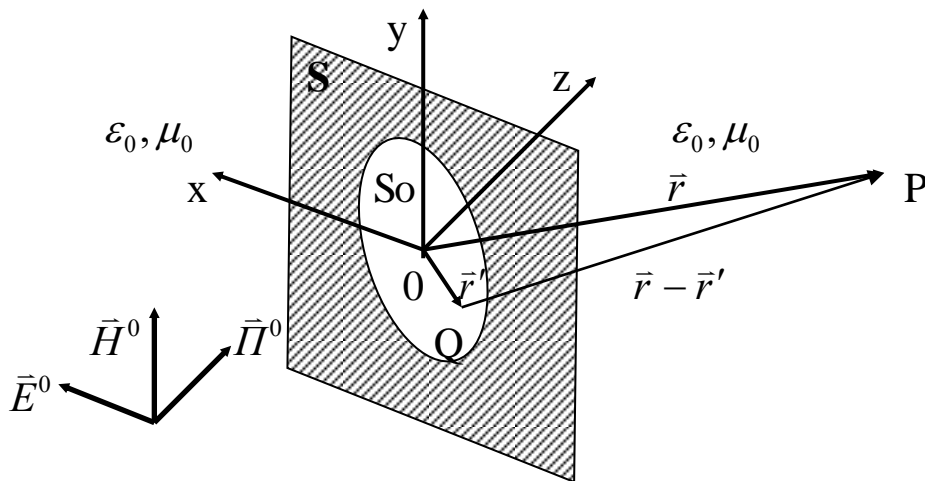


Рис. 7.6. Падение ПОВ на отверстие в экране

Можно считать, что это поле (или соответствующие ему эквивалентные поверхностные токи) в каждой точке $Q(x', y', 0)$ отверстия S_0 образуют источник излучения в пространство $z > 0$ в виде элемента Гюйгенса, и, таким образом, поле в произвольной точке наблюдения $P(x, y, z)$ определяется суммарным излучением всех элементов Гюйгенса, находящихся в отверстии.

Используя (3.69), представим электрическое поле каждого элемента Гюйгенса, занимающего элемент поверхности отверстия dS' , в дальней зоне ($|\vec{r} - \vec{r}'| \gg \lambda$) следующим выражением:

$$d\dot{\vec{E}}_m = i \frac{\vec{E}_0 k_0}{4\pi} (1 + \cos \theta) (\bar{\theta}^0 \cos \alpha - \bar{\alpha}^0 \sin \alpha) \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dS'. \quad (3.73)$$

Если размеры отверстия много меньше расстояния до точек дальней зоны, то можно считать, что прямые, проведённые из любой точки отверстия в точку наблюдения, практически параллельны. Поэтому при определении поля в точке наблюдения путём интегрирования выражения (3.73) по площади отверстия S_0 можно функции угловых координат θ и α вынести за знак интеграла. В результате получим:

$$\dot{\vec{E}}_m = \int_{S_0} d\dot{\vec{E}}_m = i \frac{\vec{E}_0 k_0}{4\pi} (1 + \cos \theta) (\bar{\theta}^0 \cos \alpha - \bar{\alpha}^0 \sin \alpha) \Phi, \quad (3.74)$$

$$\text{где} \quad \Phi = \int_{S_0} \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dS' \quad (3.75)$$

Расстояние элемента Гюйгенса, находящегося в точке $Q(x', y', 0)$, до точки наблюдения $P(x, y, z)$ определяется выражением:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} = \\ &= r \sqrt{1 - \frac{2(xx' + yy')}{r^2} + \frac{(x')^2 + (y')^2}{r^2}}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - расстояние от начала координат до точки наблюдения.

С учетом соотношений $r \gg x', r \gg y'$, разлагая корень в степенной ряд, получим:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r - \frac{xx' + yy'}{r} + \frac{(x')^2 + (y')^2}{2r}. \quad (3.77)$$

Если расстояние r настолько велико, что слагаемое $\frac{(x')^2 + (y')^2}{2r}$ в выражении (3.77) практически не влияет на величину Φ , то область пространства, в которой выполняется это условие, называется дальней зоной излучающего отверстия.

При этом $\frac{xx' + yy'}{r} \ll r$, и в знаменателе подынтегрального выражения (3.75), влияющем на амплитуду поля элемента Гюйгенса, можно положить $|\vec{r} - \vec{r}'| = r$ и вынести $1/r$ за знак интеграла. В показателе экспоненты этого делать нельзя, так как аргумент подынтегрального выражения может существенно меняться от точки к точке отверстия (особенно, когда размеры отверстия соизмеримы или больше длины волны λ).

С учетом сказанного выражение (3.75) принимает вид:

$$\Phi = \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \int_{S_0} e^{ik_0 \frac{xx' + yy'}{r}} dS' . \quad (3.77a)$$

Рассмотрим прямоугольное отверстие в экране размером $a \times b$ (рис.3.10.).

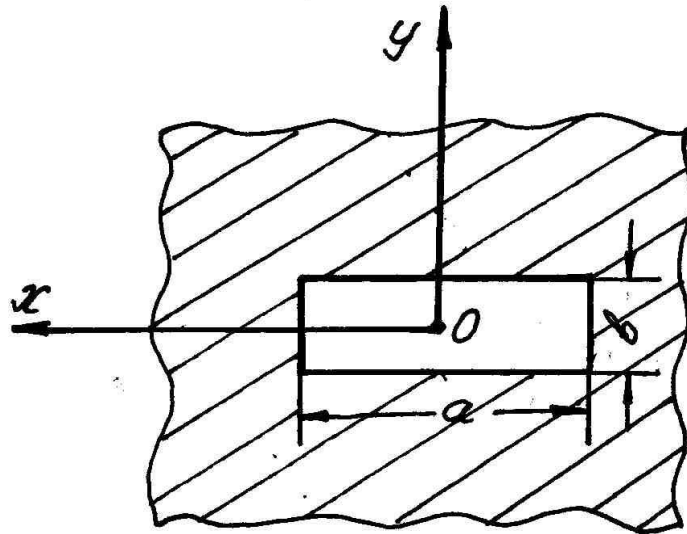


Рис. 3.10. Прямоугольное отверстие в экране

Используя формулу Эйлера $\sin \gamma = \frac{e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}}{2i}$, в результате интегрирования получаем:

$$\Phi = ab \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \frac{\sin U}{U} \frac{\sin V}{V} , \quad (3.77b)$$

где

$$U = \frac{k_0 a}{2r} x, \quad V = \frac{k_0 b}{2r} y. \quad (3.78)$$

Выражая декартовы координаты x, y через сферические r, θ, α :

$$x = r \sin \theta \cos \alpha; y = r \sin \theta \sin \alpha, \quad (3.79)$$

представим (3.78) в виде:

$$U = \frac{k_0 a}{2} \sin \theta \cos \alpha, \quad V = \frac{k_0 b}{2} \sin \theta \sin \alpha. \quad (3.80)$$

При этом выражение для поля (3.74) принимает вид:

$$\dot{\vec{E}}_m = i \frac{\dot{E}_0 k_0 a b}{4\pi} \frac{e^{-ik_0 r}}{r} (1 + \cos \theta) (\bar{\theta}^0 \cos \alpha - \bar{\alpha}^0 \sin \alpha) \frac{\sin U}{U} \frac{\sin V}{V}. \quad (3.81)$$

Полученное выражение показывает, что поле в дальней зоне представляет собой сферическую волну.

Магнитное поле в дальней зоне определяется известным соотношением (3.17):

$$\dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{W_0} [\bar{r}^0, \dot{\vec{E}}_m],$$

которое, с учетом (3.81) и $[\bar{r}^0 (\bar{\theta}^0 \cos \alpha - \bar{\alpha}^0 \sin \alpha)] = \bar{\theta}^0 \sin \alpha + \bar{\alpha}^0 \cos \alpha$, принимает вид:

$$\dot{\vec{H}}_m = i \frac{\dot{E}_0 k_0 a b}{4\pi W_0} \frac{e^{-ik_0 r}}{r} (1 + \cos \theta) (\bar{\theta}^0 \sin \alpha + \bar{\alpha}^0 \cos \alpha) \frac{\sin U}{U} \frac{\sin V}{V}. \quad (3.82)$$

Диаграммы направленности.

Напомним, что зависимость амплитуды напряженности поля какого-либо источника в дальней зоне от направления в пространстве т.е. от углов θ и α , называется диаграммой направленности данного источника излучения. При исследовании диаграммы направленности обычно делается нормировка по максимальному значению поля.

Диаграмму направленности прямоугольного отверстия в экране рассмотрим в двух плоскостях:

1. $\alpha = 0, \alpha = 180^\circ$ (E -плоскость) – для составляющей $E_{m\theta}^-$,
2. $\alpha = 90^\circ, \alpha = 270^\circ$ (H -плоскость) – для составляющей $E_{m\alpha}^-$.

В первом случае легко показать, что

$$\left. \frac{\sin V}{V} \right|_{\alpha=0,180^0} = \frac{\sin(\frac{k_0 b}{2} \sin \theta \sin \alpha)}{\frac{k_0 b}{2} \sin \theta \sin \alpha} \Big|_{\alpha=0,180^0} = 1 ,$$

и нормированная диаграмма направленности с учетом, что $E_{m\theta\max}^- = E_{m\theta}^- \big|_{\theta=0}$, описывается выражением :

$$F^E(\theta) = \frac{|E_{m\theta}^-|}{|E_{m\theta\max}^-|} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \left| \frac{\sin(\frac{k_0 a}{2} \sin \theta)}{\frac{k_0 a}{2} \sin \theta} \right| \quad (3.83)$$

Аналогично во втором случае имеем: $\left. \frac{\sin U}{U} \right|_{\alpha=90^0, 270^0} = 1 ,$

$$E_{m\alpha\max}^- = E_{m\alpha}^- \big|_{\theta=0} ,$$

и нормированная диаграмма направленности описывается выражением:

$$F^H(\theta) = \frac{|E_{m\alpha}^-|}{|E_{m\alpha\max}^-|} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \left| \frac{\sin(\frac{k_0 b}{2} \sin \theta)}{\frac{k_0 b}{2} \sin \theta} \right| . \quad (3.84)$$

В формулах (3.83), (3.84) первый множитель представляет собой нормированную диаграмму направленности элемента Гюйгенса, а второй учитывает распределение элементов Гюйгенса в отверстии по координатам x и y , соответственно, и называется интерференционным множителем.

Диаграмма направленности имеет многолепестковую структуру с главным максимумом излучения в направлении $\theta = 0$.

В частном случае, когда размеры отверстия велики по сравнению с длиной волны ($a \gg \lambda, b \gg \lambda$), в области малых углов θ ($\cos \theta \approx 1$) первые множители в формулах (3.83), (3.84) $(1 + \cos \theta)/2 \approx 1$, и диаграмму направленности фактически определяют интерференционные множители. Поэтому можно полагать, что:

$$F^E(\theta) = \left| \frac{\sin\left(\frac{k_0 a}{2} \sin \theta\right)}{\frac{k_0 a}{2} \sin \theta} \right|, \quad (3.85)$$

$$F^H(\theta) = \left| \frac{\sin\left(\frac{k_0 b}{2} \sin \theta\right)}{\frac{k_0 b}{2} \sin \theta} \right|. \quad (3.86)$$

Графически функция $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$ представлена на рис. 3.11а, а соответствующая ей диаграмма направленности в полярной системе координат - на рис.3.11б.

Определим ширину главного лепестка диаграммы направленности в E -плоскости $2\theta_0^E$ как угол между ближайшими направлениями θ_1 и θ_2 , в которых излучение отсутствует.

Из рис.3.11а следует, что нулевому уровню главного лепестка диаграммы направленности в направлении θ_1 (рис.3.11 б) соответствует первый корень функции $\sin x / x$. При этом, с учетом (3.83), угол θ_0^E определяется из следующего уравнения:

$$\frac{k_0 a}{2} \sin \theta_0^E = \pi. \quad (3.87)$$

Отсюда получаем: $\sin \theta_0^E = \frac{\lambda}{a}$, а $\theta_0^E = \arcsin \frac{\lambda}{a}$.

Для отверстия, у которого $a \gg \lambda$, можно считать, что $\theta_0^E \approx \frac{\lambda}{a}$, и ширина главного лепестка диаграммы направленности “по нулям” в E -плоскости определяется выражением:

$$2\theta_0^E \approx \frac{2\lambda}{a}. \quad (3.88)$$

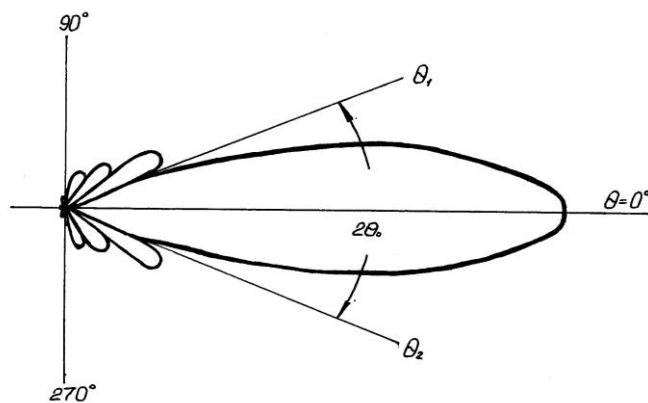
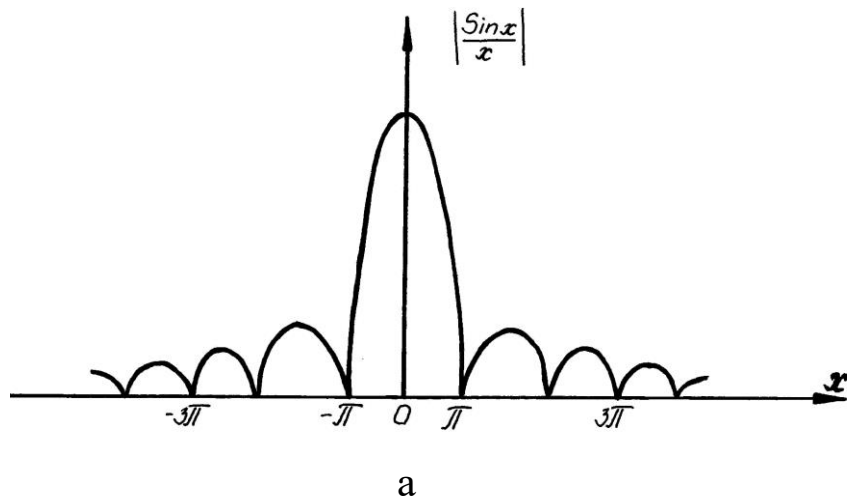


Рис. 3.11. Диаграмма направленности прямоугольного отверстия

Аналогично, если $b \gg \lambda$, то ширина главного лепестка диаграммы направленности “по нулям” в H - плоскости определяется выражением:

$$2\theta_0^H \approx \frac{2\lambda}{b} \quad (3.89)$$

При увеличении размеров отверстия и (или) уменьшении длины волны из (3.88), (3.89) следует, что ширина главного лепестка диаграммы направленности сужается.

ГЛАВА 4. ВОЗБУЖДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД ПЛОСКОЙ ОДНОРОДНОЙ ВОЛНОЙ

4.1. Постановка задачи

Совместим границу раздела сред с плоскостью $z=0$, которая делит все пространство на две области: область I ($z<0$) и область II ($z>0$). Области I и II являются однородными средами и характеризуются волновым числом

$\dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\varepsilon}_a \mu_a}$ и волновым сопротивлением $\dot{W} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot{\varepsilon}_a}}$, где

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a (1 - itg\delta), \quad tg\delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a}, \quad \omega = 2\pi f, \quad f - \text{частота},$$

ε_a - абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, μ_a - абсолютная магнитная проницаемость среды, σ - удельная проводимость среды.

Из области I на границу раздела двух сред падает плоская однородная волна (ПОВ) под углом φ к оси z . Назовем эту волну падающей волной.

Обозначим через $\dot{\vec{E}}_m^{(0)}$, $\dot{\vec{H}}_m^{(0)}$ комплексные амплитуды напряженности электрического и магнитного поля падающей волны.

В общем случае ПОВ с произвольной поляризацией векторов поля можно представить в виде суммы двух ПОВ: с перпендикулярной поляризацией $(\dot{\vec{E}}_{m\perp}^{(0)}, \dot{\vec{H}}_{m\perp}^{(0)})$ (вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения) и с параллельной поляризацией $(\dot{\vec{E}}_{m\parallel}^{(0)}, \dot{\vec{H}}_{m\parallel}^{(0)})$ (вектор \vec{E} параллелен плоскости падения), т.е.

$$\dot{\vec{E}}_m^{(0)} = \dot{\vec{E}}_{m\perp}^{(0)} + \dot{\vec{E}}_{m\parallel}^{(0)}, \quad \dot{\vec{H}}_m^{(0)} = \dot{\vec{H}}_{m\perp}^{(0)} + \dot{\vec{H}}_{m\parallel}^{(0)} \quad (4.1)$$

Плоскостью падения называется плоскость, проходящая через направление распространения волны и нормаль к границе раздела сред. Если ПОВ распространяется вдоль оси $\xi^{(0)}$, расположенной в плоскости yOz (рис. 4.1), то эта плоскость является плоскостью падения.

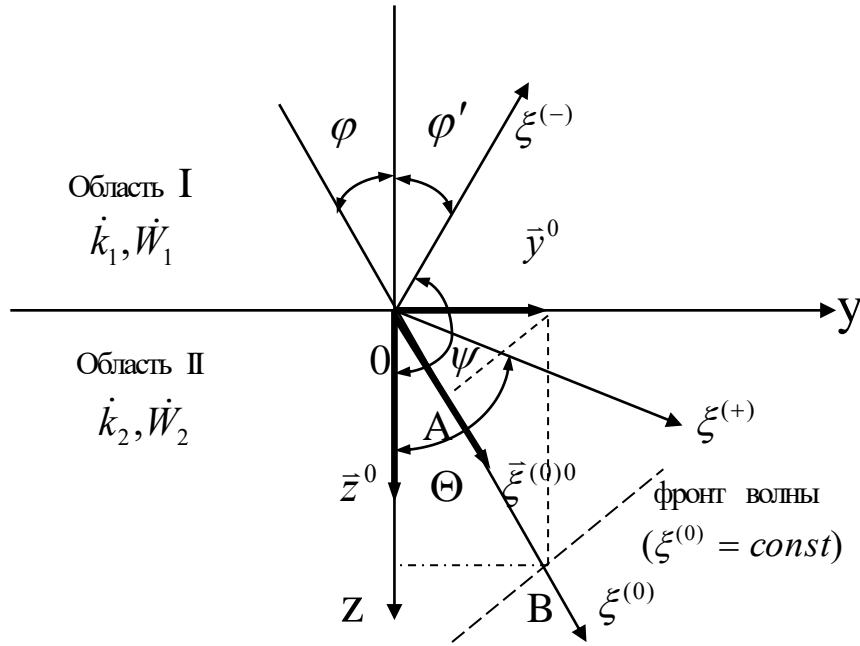


Рис. 4.1. Падение ПОВ на границу раздела сред

Используя (2.31), (2.33) , представим выражения для поля падающей волны в виде:

$$\vec{E}_{m\perp}^{(0)} = \vec{x}^0 \dot{C}_{\perp} e^{-i\dot{k}_1 \xi^{(0)}}, \quad \dot{H}_{m\perp} = \frac{1}{\dot{W}_{\perp}} \left[\vec{\xi}^{(0)0}, \dot{E}_{m\perp}^{(0)} \right], \quad (4.2)$$

$$\dot{H}_{m\parallel}^{(0)} = \vec{x}^0 \dot{C}_{\parallel} e^{-i\dot{k}_1 \xi^{(0)}}, \quad \dot{E}_{m\parallel}^{(0)} = \dot{W}_{\perp} \left[\dot{H}_{m\parallel}^{(0)}, \vec{\xi}^{(0)0} \right], \quad (4.3)$$

где \dot{C}_{\perp} , \dot{C}_{\parallel} - заданные константы, $\vec{\xi}^{(0)0}$ - единичный вектор вдоль направления распространения падающей волны:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\xi}^{(0)0} &= \vec{y}^0 \sin \varphi + \vec{z}^0 \cos \varphi \\ \xi^{(0)} &= OA + AB = y \sin \varphi + z \cos \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (4.4)$$

С учетом (4.4) приведем выражения (4.2), (4.3) к виду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m\perp}^{(0)} &= \vec{x}^0 \dot{C}_{\perp} e^{-i\dot{k}_1 (y \sin \varphi + z \cos \varphi)} \\ \dot{H}_{m\perp}^{(0)} &= \frac{\dot{C}_{\perp}}{\dot{W}_1} (\vec{y}^0 \cos \varphi - \vec{z}^0 \sin \varphi) \cdot e^{-i\dot{k}_1 (y \sin \varphi + z \cos \varphi)} \end{aligned} \right\}, \quad (4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{H}}_{m||}^{(0)} &= \vec{x}^0 \dot{C}_{||} e^{-i \dot{k}_1 (y \sin \varphi + z \cos \varphi)} \\ \dot{\vec{E}}_{m||}^{(0)} &= \dot{C}_{||} \dot{W}_1 (-\vec{y}^0 \cos \varphi + \vec{z}^0 \sin \varphi) \cdot e^{-i \dot{k}_1 (y \sin \varphi + z \cos \varphi)} \end{aligned} \right\}. \quad (4.6)$$

Выражения (4.5), (4.6) удовлетворяют однородной системе уравнений электродинамики (3.49) при $\dot{\varepsilon}_a = \dot{\varepsilon}_{a1}$, $\mu_a = \mu_{a1}$:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \dot{\vec{H}}_m &= i \omega \dot{\varepsilon}_{a1} \dot{\vec{E}}_m \\ \text{rot} \dot{\vec{E}}_m &= -i \omega \mu_{a1} \dot{\vec{H}}_m \end{aligned} \right\}. \quad (4.7)$$

Таким образом, задача о падении ПОВ с произвольной поляризацией векторов поля на границу раздела сред сводится к решению двух задач: о падении ПОВ с перпендикулярной и с параллельной поляризацией векторов поля. Решение обеих задач должно удовлетворять однородной системе уравнений электродинамики в областях I, II и граничным условиям, обеспечивающим непрерывность тангенциальных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей на границе раздела сред.

4.2. Решение задачи при нормальном падении

Рассмотрим нормальное падение ПОВ, у которой вектор \vec{E} параллелен оси x. Полагая в (4.5) $\varphi = 0$, получим следующие выражения для поля падающей волны:

$$\dot{\vec{E}}_m^{(0)} = \vec{x}^0 \dot{C} e^{-i \dot{k}_1 z}, \quad \dot{\vec{H}}_m^{(0)} = \vec{y}^0 \frac{\dot{C}}{\dot{W}_1} e^{-i \dot{k}_1 z}, \quad (4.8)$$

где \dot{C} - заданная константа.

Представим поле в области I в виде суммы первичного поля – поля падающей волны $(\dot{\vec{E}}_m^{(0)}, \dot{\vec{H}}_m^{(0)})$ и вторичного поля $(\dot{\vec{E}}_m^{(-)}, \dot{\vec{H}}_m^{(-)})$, возбуждаемого эквивалентными поверхностными токами, равномерно распределенными по плоскости $z=0$:

$$\dot{\vec{E}}_m^I = \dot{\vec{E}}_m^{(0)} + \dot{\vec{E}}_m^{(-)}, \quad \dot{\vec{H}}_m^I = \dot{\vec{H}}_m^{(0)} + \dot{\vec{H}}_m^{(-)}. \quad (4.9)$$

Вторичное поле, так же, как и первичное, удовлетворяет однородной системе уравнений электродинамики (4.7).

Расписывая систему (4.7) в декартовых координатах (x,y,z) и учитывая, что, в силу плоскостной симметрии задачи, поле зависит только от одной координаты z, можно получить следующее уравнение для определения $\dot{\vec{E}}_m^{(-)}$:

$$\frac{d^2 \dot{\vec{E}}_m^{(-)}}{dz^2} + k_1^2 \dot{\vec{E}}_m^{(-)} = 0. \quad (4.10)$$

Так как вектор $\vec{E}^{(0)}$ параллелен оси x, то и вектор $\vec{E}^{(-)}$ также параллелен оси x, и решение уравнения (4.10) представляется в виде:

$$\dot{\vec{E}}_m^{(-)} = \vec{x}^0 (\dot{A}^{(-)} e^{-ik_1 z} + \dot{B}^{(-)} e^{ik_1 z}), \text{ где } \dot{A}^{(-)} \text{ и } \dot{B}^{(-)} - \text{постоянные.}$$

Так как функция $e^{-ik_1 z}$ не удовлетворяет условию при $z \rightarrow (-\infty)$, то $\dot{A}^{(-)} = 0$ и, следовательно:

$$\dot{\vec{E}}_m^{(-)} = \vec{x}^0 \dot{B}^{(-)} e^{ik_1 z}. \quad (4.11)$$

Из второго уравнения системы (4.7) находим:

$$\dot{\vec{H}}_m^{(-)} = \frac{\text{rot} \dot{\vec{E}}_m^{(-)}}{-i\omega\mu_{a1}} = -\vec{y}^0 \frac{\dot{B}^{(-)}}{\dot{W}_1} e^{ik_1 z}. \quad (4.12)$$

Поле в области II: $\dot{\vec{E}}_m^{II} = \dot{\vec{E}}_m^{(+)}$ можно рассматривать как поле, возбуждаемое эквивалентными поверхностными токами, равномерно распределенными на плоскости $z=0$. Это поле также удовлетворяет однородной системе уравнений электродинамики, из которой можно получить следующее уравнение для определения $\dot{\vec{E}}_m^{(+)}$:

$$\frac{d^2 \dot{\vec{E}}_m^{(+)}}{dz^2} + k_2^2 \dot{\vec{E}}_m^{(+)} = 0, \quad (4.13)$$

общее решение, которого можно представить в виде:

$$\dot{\vec{E}}_m^{(+)} = \vec{x}^0 (\dot{A}^{(+)} e^{-ik_2 z} + \dot{B}^{(+)} e^{ik_2 z}).$$

Так как функция $e^{ik_2 z}$ не удовлетворяет условию при $z \rightarrow \infty$, то постоянная $\dot{B}^{(+)}$ равна нулю и выражение для напряженности электрического поля в области II представляется в виде:

$$\dot{\vec{E}}_m^{II} = \dot{\vec{E}}_m^{(+)} = \vec{x}^0 \dot{A}^{(+)} e^{-ik_2 z}. \quad (4.14)$$

Напряженность магнитного поля определяется из второго уравнения системы (4.7) при $\mu_{a1} = \mu_{a2}$:

$$\dot{H}_m^{(+)} = \frac{rot \dot{\vec{E}}_m^{(+)}}{-i\omega\mu_{a2}} = \vec{y}^0 \frac{\dot{A}^{(+)}}{\dot{W}_2} e^{-ik_2 z}. \quad (4.15)$$

Постоянные коэффициенты $\dot{B}^{(-)}$ и $\dot{A}^{(+)}$ представим в виде:

$$\dot{B}^{(-)} = \dot{C}\dot{\rho}, \quad \dot{A}^{(+)} = \dot{C}\dot{\tau}. \quad (4.16)$$

Коэффициент $\dot{\rho} = \left. \frac{\dot{E}_m^{(-)}}{\dot{E}_m^{(0)}} \right|_{z=0}$ называется коэффициентом отражения;

коэффициент $\dot{\tau} = \left. \frac{\dot{E}_m^{(+)}}{\dot{E}_m^{(0)}} \right|_{z=0}$ называется коэффициентом прохождения.

Используя граничные условия на границе раздела сред: $\dot{E}_{m\tau}^I|_{z=0} = \dot{E}_{m\tau}^{II}|_{z=0}$; $\dot{H}_{m\tau}^I|_{z=0} = \dot{H}_{m\tau}^{II}|_{z=0}$, получим следующую систему уравнений относительно коэффициентов $\dot{\rho}$ и $\dot{\tau}$:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \dot{\rho} &= \dot{\tau} \\ 1 - \dot{\rho} &= \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2} \dot{\tau} \end{aligned} \right\}. \quad (4.17)$$

Решая эту систему, находим:

$$\dot{\tau} = \frac{2\dot{W}_2}{\dot{W}_2 + \dot{W}_1}, \quad \dot{\rho} = \frac{\dot{W}_2 - \dot{W}_1}{\dot{W}_2 + \dot{W}_1}. \quad (4.18)$$

Таким образом, поле, возбуждаемое эквивалентными поверхностными токами, равномерно распределенными на плоскости $z=0$, представляет две ПОВ, распространяющиеся от плоскости $z=0$ в положительном и отрицательном направлении оси z . Волна $(\dot{E}_m^{(-)}, \dot{H}_m^{(-)})$, распространяющаяся в области I в отрицательном направлении оси Z , называется отраженной волной. Волна $(\dot{E}_m^{(+)}, \dot{H}_m^{(+)})$, распространяющаяся в области II в положительном направлении оси z , называется прошедшей волной. Амплитуды отраженной и прошедшей волны определяются выражениями (4.16), (4.18).

4.3. Решение задачи при наклонном падении

Поля падающей волны определяются выражениями (4.5) для перпендикулярной поляризации и выражениями (4.6) для параллельной поляризации.

Решение задачи строим аналогично решению задачи при нормальном падении. Поле в области I представим в виде суммы двух волн - падающей и отраженной

$$\dot{E}_m^I = \dot{E}_m^{(0)} + \dot{E}_m^{(-)}; \quad \dot{H}_m^I = \dot{H}_m^{(0)} + \dot{H}_m^{(-)}. \quad (4.19)$$

Поле в области II представим в виде прошедшей волны:

$$\dot{E}_m^{II} = \dot{E}_m^{(+)}, \quad \dot{H}_m^{II} = \dot{H}_m^{(+)} \quad (4.20)$$

Поле отраженной волны можно получить из выражений (4.5), (4.6), заменив в них угол φ на угол ψ (рис.4.1), \dot{C}_\perp на $\dot{C}_\perp \dot{\rho}_\perp$, \dot{C}_\parallel на $\dot{C}_\parallel \dot{\rho}_\parallel$, где

$\dot{\rho}_{\perp} = \frac{\dot{\vec{E}}_m^{(-)}}{\dot{\vec{E}}_m^{(0)}} \Big|_{Z=0}$ - коэффициент отражения для волны с перпендикулярной

поляризацией векторов поля; $\dot{\rho}_{\parallel} = \frac{\dot{\vec{H}}_m^{(-)}}{\dot{\vec{H}}_m^{(0)}} \Big|_{Z=0}$ - коэффициент отражения для

волны с параллельной поляризацией векторов поля.

Поле прошедшей волны также можно получить из выражений (4.5), (4.6), заменив в них: \dot{k}_1 на \dot{k}_2 , \dot{W}_1 на \dot{W}_2 , φ на Θ , \dot{C}_{\perp} на $\dot{C}_{\perp} \dot{\tau}_{\perp}$, \dot{C}_{\parallel} на

$\dot{C}_{\parallel} \dot{\tau}_{\parallel}$, где $\dot{\tau}_{\perp} = \frac{\dot{\vec{E}}_m^{(+)}}{\dot{\vec{E}}_m^{(0)}} \Big|_{Z=0}$ - коэффициент прохождения для волны с

перпендикулярной поляризацией векторов поля, $\dot{\tau}_{\parallel} = \frac{\dot{\vec{H}}_m^{(+)}}{\dot{\vec{H}}_m^{(0)}} \Big|_{z=0}$ -

коэффициент прохождения для волны с параллельной поляризацией векторов поля.

Так как поле падающей волны удовлетворяет однородной системе уравнений электродинамики, то этой системе также удовлетворяют поля отраженной и прошедшей волн.

Законы Снеллиуса

Для выполнения граничных условий необходимо, чтобы все три волны имели бы одинаковую зависимость от координаты y при $z=0$:

$$e^{-i k_1 y \sin \varphi} = e^{-i k_1 y \sin \psi} = e^{-i k_2 y \sin \Theta}. \quad (4.21)$$

Из (4.21) следует: $\sin \varphi = \sin \psi$. Отсюда $\psi = \pi - \varphi$, или $\varphi = \pi - \psi = \varphi'$ (рис. 4.1). Угол φ' называют углом отражения.

Таким образом, угол отражения φ' равен углу падения φ :

$$\varphi' = \varphi. \quad (4.22)$$

Соотношение (4.22) выражает известный из оптики первый закон Снеллиуса.

Из (4.21) также следует, что:

$$\dot{k}_1 \sin \varphi = \dot{k}_2 \sin \Theta. \quad (4.23)$$

Соотношение (4.23) является обобщением второго закона Снеллиуса, из которого можно определить угол Θ , который называют углом преломления.

Формулы Френеля

Используя граничные условия:

$$\left. \dot{\vec{E}}_{m\tau}^I \right|_{Z=0} = \left. \dot{\vec{E}}_{m\tau}^{II} \right|_{Z=0}; \left. \dot{\vec{H}}_{m\tau}^I \right|_{Z=0} = \left. \dot{\vec{H}}_{m\tau}^{II} \right|_{Z=0}, \quad (4.24)$$

получим систему из двух линейных уравнений относительно коэффициентов $\dot{\rho}_\perp$ и $\dot{\tau}_\perp$, или $\dot{\rho}_\parallel$ и $\dot{\tau}_\parallel$.

Решая эту систему, получим следующие выражения для коэффициентов отражения и прохождения:

$$\text{а) } \dot{\rho}_\perp = \frac{\dot{W}_2 \cos \varphi - \dot{W}_1 \cos \Theta}{\dot{W}_2 \cos \varphi + \dot{W}_1 \cos \Theta}, \quad \text{б) } \dot{\tau}_\perp = \frac{2\dot{W}_2 \cos \varphi}{\dot{W}_2 \cos \varphi + \dot{W}_1 \cos \Theta}; \quad (4.25)$$

$$\text{а) } \dot{\rho}_\parallel = \frac{\dot{W}_1 \cos \varphi - \dot{W}_2 \cos \Theta}{\dot{W}_1 \cos \varphi + \dot{W}_2 \cos \Theta}, \quad \text{б) } \dot{\tau}_\parallel = \frac{2\dot{W}_1 \cos \varphi}{\dot{W}_1 \cos \varphi + \dot{W}_2 \cos \Theta}. \quad (4.26)$$

Формулы (4.25), (4.26) называют формулами Френеля.

Полагая в формулах (4.25) $\varphi=0$, $\Theta=0$, получим выражения для $\dot{\rho}$ и $\dot{\tau}$ при нормальном падении ПОВ на границу раздела сред, которые совпадают с полученными ранее (4.18).

4.4. Анализ решения

Из второго закона Снеллиуса (4.23) следует, что угол преломления Θ может принимать как действительные, так и комплексные значения.

Зависимость поля в области II от координат y, z , как следует из формул (4.5), (4.6), описывается функцией:

$$\psi^{II}(y, z) = e^{-i\dot{k}_2(y \sin \Theta + z \cos \Theta)}, \quad (4.27)$$

которая при действительных значениях волнового числа $\dot{k}_2 = k_2$ и угла Θ определяет ПОВ, распространяющуюся под углом Θ к оси z (рис. 4.1.).

Из (4.23) следует, что угол Θ принимает действительные значения при любом угле падения только в том случае, если $\dot{k}_1 = k_1$, $\dot{k}_2 = k_2$ и $k_2 > k_1$. При этом $\Theta < \varphi$.

При анализе структуры поля в области II при комплексных значениях угла Θ , используя (4.23), представим функцию $\psi^{II}(y, z)$ при действительных значениях волнового числа \dot{k}_1 ($\dot{k}_1 = k_1$) в виде:

$$\psi^{II}(y, z) = e^{-i(k_1 \sin \varphi)y} e^{-i\beta z} e^{-\alpha z}, \quad (4.28)$$

$$\text{где } \dot{k}_2 \cos \Theta = \dot{k}_2 \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{\dot{k}_2} \sin \varphi \right)^2} = \beta - i\alpha, \quad \beta \geq 0, \alpha \geq 0. \quad (4.29)$$

В этом случае функция $\psi^{II}(y, z)$ при $\alpha \neq 0$ определяет неоднородную плоскую волну (ее амплитуда зависит от координаты z), распространяющуюся под углом γ к оси Z , который находится из следующего выражения:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{k_1 \sin \varphi}{\beta}. \quad (4.30)$$

Полное отражение. Поверхностные волны

Рассмотрим падение ПОВ на границу раздела сред при $\dot{k}_2 = k_2$ и $k_1 > k_2$. В этом случае при некотором угле падения $\varphi = \varphi^* = \arcsin \frac{k_2}{k_1}$

угол преломления Θ , как следует из (4.23), становится равным 90° . При этом коэффициент отражения, определяемый формулами Френеля (4.25), (4.26), становится равным единице. То есть при $\varphi = \varphi^*$ происходит полное отражение от диэлектрической границы. Угол φ^* называется углом полного внутреннего отражения. При $\varphi > \varphi^*$ величина $\sin \Theta = \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi$ становится больше единицы.

Используя формулы (4.29), (4.30), находим, что:

$$\beta = 0, \quad \alpha = k_2 \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2} \sin \varphi\right)^2 - 1}, \quad \gamma = 90^\circ.$$

В этом случае поле в области II представляет плоскую неоднородную волну, распространяющуюся вдоль оси y , т.е. вдоль границы раздела сред. Амплитуда волны убывает по экспоненциальному закону в направлении нормали к границе раздела сред.

Так как при $\varphi > \varphi^*$ $\sin \Theta > 1$, то $\cos \Theta = -i\sqrt{\sin^2 \Theta - 1}$ принимает чисто мнимые значения и, как следует из формул Френеля (4.25), (4.26), модуль коэффициента отражения равен единице. Таким образом, при $\varphi \geq \varphi^*$ имеет место явление полного внутреннего отражения от диэлектрической границы. При этом поле в области I, также как и в области II, представляет плоскую неоднородную волну, распространяющуюся в направлении оси y , а амплитуда поля изменяется вдоль координаты z по закону стоячей волны. Так как волна распространяется вдоль границы раздела сред, то ее называют поверхностной волной.

Фазовая скорость поверхностной волны V_ϕ определяется выражением:

$V_\phi = \frac{\omega}{k_1 \sin \varphi} = \frac{\omega}{k_2 \sin \Theta}$. Поскольку $\sin \Theta > 1$, то $V_\phi < \frac{\omega}{k_2} = v$, где v - скорость света в области II. Таким образом, фазовая скорость поверхностной волны меньше скорости света v .

Волны, у которых фазовая скорость меньше скорости света, называют медленными волнами.

Явление полного внутреннего отражения используется в теории диэлектрических волноводов и диэлектрических антенн.

Полное преломление. Угол Брюстера

Анализируя выражения (4.25a), (4.26a), можно установить, что при некотором угле падения $\varphi = \varphi_B$, который называется углом Брюстера, коэффициент отражения ρ_{\perp} или ρ_{\parallel} обращается в ноль. При этом происходит полное прохождение волны во вторую среду. Приравнявая нулю числители выражений (4.25a), (4.26a), получим следующие выражения для нахождения угла Брюстера:

$$\sin^2 \varphi_{B\perp} = \frac{\frac{\varepsilon_2}{\mu_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}, \quad \sin^2 \varphi_{B\parallel} = \frac{\frac{\mu_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}.$$

При $\mu_2 = \mu_1$ в случае параллельной поляризации получим следующее выражение для угла Брюстера: $\varphi_{B\parallel} = \arctg \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$.

В случае перпендикулярной поляризации при $\mu_2 = \mu_1$ полного прохождения не происходит ни при каких значениях угла падения φ . Оно возможно только при $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, то есть в однородной среде.

Скин-слой и поверхностный эффект

Рассмотрим падение ПОВ на проводящую границу раздела сред при $tg\delta_2 \gg 1$.

В этом случае $\frac{k_1}{|\dot{k}_2|} \ll 1$ и из (4.29) находим, что

$$\beta - i\alpha = \dot{k}_2 = k_2 \sqrt{1 - i \cdot tg\delta_2} \approx k_2 \sqrt{-i \cdot tg\delta_2} = k_2 \sqrt{\frac{tg\delta_2}{2}} (1 - i).$$

Отсюда
$$\beta = \alpha = k_2 \sqrt{\frac{tg \delta_2}{2}} . \quad (4.31)$$

Подставляя (4.31) в (4.30), получим:

$$tg \gamma = \frac{k_1 \sin \varphi}{k_2 \sqrt{\frac{tg \delta_2}{2}}} . \quad (4.32)$$

Из (4.32) следует, что при $tg \delta_2 = \frac{\sigma_2}{\omega \varepsilon_{a2}} \gg 1$ независимо от угла падения φ величина угла преломления γ близка к нулю:

$$\gamma|_{tg \delta_2 \gg 1} \approx 0 . \quad (4.33)$$

При этом поле в области II представляет ПОВ, распространяющуюся по нормали к границе раздела сред с коэффициентом затухания:

$$\alpha = k_2 \sqrt{\frac{tg \delta_2}{2}} = \omega \sqrt{\varepsilon_{a2} \mu_{a2}} \sqrt{\frac{\sigma_2}{2 \omega \varepsilon_{a2}}} = \sqrt{\frac{\sigma_2 \omega \mu_{a2}}{2}} . \quad (4.34)$$

Введем в рассмотрение параметр $\Delta^0 = \frac{1}{\alpha}$, который называется глубиной проникновения поля в проводник, или толщиной скин - слоя. Амплитуда ПОВ на расстояние Δ^0 от поверхности проводника уменьшается в

e раз. Например, для медного проводника: $\Delta^0 [мм] = 66 \cdot f^{-\frac{1}{2}} [Гц]$ и при $f = 10 ГГц$ ($\lambda = 3 см$) $\Delta^0 = 6.6 \cdot 10^{-4} мм$.

Отсюда видно, что электромагнитное поле на СВЧ сосредоточено в небольшом поверхностном слое проводника толщиной в несколько скин-слоев и уже на расстоянии $5 \Delta^0$ амплитуда волны уменьшается приблизительно в 150 раз, а на расстоянии $7 \Delta^0$ – в 1000 раз. Это явление называется поверхностным эффектом, или скин-эффектом.

Приближенное граничное условие Леонтовича

Как было отмечено выше, поле в проводнике, независимо от угла падения φ представляет ПОВ, распространяющуюся практически по нормали к поверхности проводника (рис. 4.2).

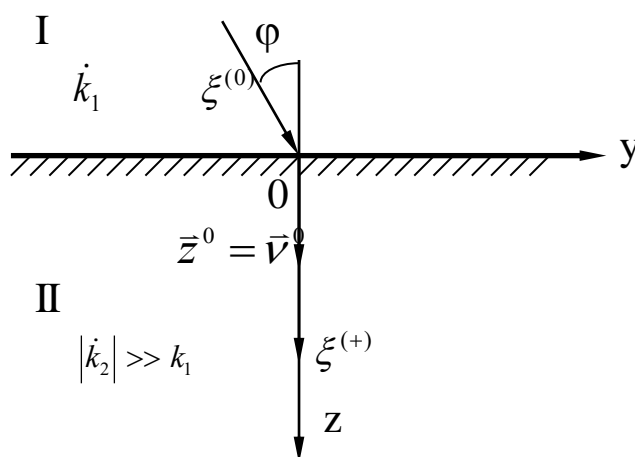


Рис. 4.2 Падение ПОВ на поверхность проводника

Напряженности электрического и магнитного полей в области II связаны между собой известным соотношением:

$$\dot{E}_m^{\text{II}} = \dot{W}_2 \left[\dot{H}_m^{\text{II}}, \bar{z}^0 \right], \quad (4.35)$$

$$\dot{W}_2 = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\varepsilon_{a2} \left(1 - i \frac{\sigma_2}{\omega \varepsilon_{a2}} \right)}} \approx \sqrt{\frac{\mu_{a2} \omega}{2 \sigma_2}} (1 + i) = \frac{1}{\sigma_2 \Delta^0} (1 + i), \quad (4.36)$$

$\bar{z}^0 = \vec{v}^0$ - единичный вектор нормали, направленной внутрь проводника (рис.4.2).

В области II векторы напряженности электрического и магнитного полей практически параллельны границе раздела сред (плоскость $z=0$). Поэтому можно считать, что при $z \rightarrow 0$ они переходят в тангенциальные

составляющие напряженности поля на поверхности проводника при подходе к ней со стороны области II :

$$\dot{\vec{E}}_{m2}^{\parallel} \Big|_{Z \rightarrow 0} = \dot{\vec{E}}_{m\tau}^{\parallel}, \quad \dot{\vec{H}}_{m2}^{\parallel} \Big|_{Z \rightarrow 0} = \dot{\vec{H}}_{m\tau}^{\parallel}.$$

Используя соотношение (4.35), получаем

$$\dot{\vec{E}}_{m\tau}^{\parallel} = \dot{W}_2 \left[\dot{\vec{H}}_{m\tau}^{\parallel}, \vec{V}^0 \right]. \quad (4.37)$$

Так как тангенциальные составляющие напряженности поля непрерывны на границе раздела сред:

$\dot{\vec{E}}_{m\tau}^{\parallel} = \dot{\vec{E}}_{m\tau}^{\perp} = \dot{\vec{E}}_{m\tau}$, $\dot{\vec{H}}_{m\tau}^{\parallel} = \dot{\vec{H}}_{m\tau}^{\perp} = \dot{\vec{H}}_{m\tau}$, то из (4.37) получим следующее соотношение :

$$\dot{\vec{E}}_{m\tau} = \dot{W}_2 \left[\dot{\vec{H}}_{m\tau} |_{S_{np}}, \vec{V}^0 \right], \quad (4.38)$$

где \vec{V}^0 - единичный вектор внутренней к поверхности проводника нормали.

Соотношение (4.38) называют приближенным граничным условием Леонтовича.

В случае идеального проводника ($\sigma_{np} = \infty$) его волновое сопротивление, как видно из (4.36), равно нулю и из (4.38) получаем известное граничное условие: тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности идеального проводника равна нулю.

ГЛАВА 5. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПОЛЫХ ВОЛНОВОДАХ

5.1. Постановка задачи

Полый волновод представляет собой металлическую трубу с произвольной формой поперечного сечения, предназначенную для передачи электромагнитной энергии.

Будем рассматривать волновод бесконечной длины, форма поперечного сечения которого остается неизменной вдоль некоторой оси z . Полость волновода может быть заполнена однородным диэлектриком с параметрами $\varepsilon, \mu, \sigma_0$.

Если удельная проводимость диэлектрика $\sigma_d = 0$, а удельная проводимость металлической оболочки волновода $\sigma_M = \infty$, то такой волновод называется идеальным волноводом. В идеальном волноводe отсутствуют потери электромагнитной энергии.

Задача возбуждения идеального волновода ставится следующим образом. В некоторой области V' , ограниченной поперечными плоскостями z_1' и z_2' (рис.5.1), заданы электрические и магнитные сторонние токи, распределенные с плотностями \vec{j}_m^{cm} и \vec{j}_m^{Mcm} . Требуется найти электромагнитное поле в области $z < z_1 < z_1'; z > z_2 > z_2'$ (рис.5.1), удовлетворяющее:

1) неоднородной системе уравнений электродинамики (3.26) при $\dot{\epsilon}_a = \epsilon_a$:

$$\begin{aligned} \text{rot} \dot{\vec{H}}_m &= i\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_m^{cm}, \\ \text{rot} \dot{\vec{E}}_m &= -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m - \dot{\vec{j}}_m^{Mcm}; \end{aligned} \quad (5.1)$$

2) граничному условию на поверхности S_0 идеально проводящей оболочки волновода:

$$\dot{\vec{E}}_{m\tau} |_{S_0} = 0; \quad (5.2)$$

3) условию на бесконечности: при $z \rightarrow (\pm \infty)$ поле должно иметь характер распространяющихся от источников (области V') электромагнитных волн, или стремиться к нулю.



Рис. 5.1 Продольное сечение полого волновода

Таким образом, задача возбуждения полых волноводов сведена к решению граничной задачи электродинамики, имеющей единственное решение. Решение этой задачи можно получить методом разложения искомого поля в ряды по системе собственных волн.

Собственные волны $(\dot{\vec{E}}_{mc}, \dot{\vec{H}}_{mc})$ являются решениями однородной системы уравнений электродинамики (системы (5.1) при $\dot{j}_m^{cm} = 0$, $\dot{j}_m^{Mcm} = 0$):

$$\text{rot} \dot{\vec{H}}_m = i\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_m, \quad (5.3)$$

$$\text{rot} \dot{\vec{E}}_m = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m,$$

удовлетворяющими граничному условию (5.2):

$$\dot{\vec{E}}_{m\tau} |_{S_0} = 0. \quad (5.2')$$

Задача о собственных волнах (5.3), (5.2'), как будет показано, имеет бесконечное множество решений.

5.2. Собственные волны полых волноводов

Электрические и магнитные волны

Ниже будет показано, что система уравнений (5.3) имеет два типа решений, удовлетворяющих граничному условию (5.2'): 1) решение электрического типа $\dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}}, \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}}$, у которого продольная составляющая на-

пряжённости электрического поля $\dot{E}_{mz}^{\mathcal{E}} \neq 0$, а продольная составляющая

напряжённости магнитного поля $\dot{H}_{mz}^{\mathcal{E}} = 0$; 2) решение магнитного типа

$\dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{M}}, \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{M}}$, у которого $\dot{H}_{mz}^{\mathcal{M}} \neq 0$, а $\dot{E}_{mz}^{\mathcal{M}} = 0$.

Решение электрического типа представляется в виде:

$$\dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}} = \dot{\vec{E}}_{m\perp}^{\mathcal{E}} + \vec{z}^0 \dot{E}_{mz}^{\mathcal{E}}, \quad \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}} = \dot{\vec{H}}_{m\perp}^{\mathcal{E}}, \quad (5.4)$$

а решение магнитного типа в виде:

$$\dot{\vec{H}}_m^M = \dot{\vec{H}}_{m\perp}^M + \vec{z}^0 \dot{H}_{mz}^{\mathcal{O}}, \quad \dot{\vec{E}}_m^M = \dot{\vec{E}}_{m\perp}^M, \quad (5.5)$$

где $\dot{\vec{E}}_{m\perp}^{\mathcal{O},M}, \dot{\vec{H}}_{m\perp}^{\mathcal{O},M}$ - поперечные составляющие напряженности поля, лежащие в поперечном сечении волновода $Z=\text{const}$.

Собственные волны, которые можно представить в виде (5.4) называются электрическими волнами, или Е-волнами относительно продольной координаты Z .

Собственные волны, которые можно представить в виде (5.5), называются магнитными волнами, или Н-волнами.

Используя представление поля через векторный потенциал $\dot{\vec{A}}_m$ (раздел 2.2), представим решение системы (5.3) в виде:

$$\dot{\vec{H}}_m = i\omega\epsilon_a \text{rot} \dot{\vec{\Pi}}_m, \quad \dot{\vec{E}}_m = \text{grad} \text{div} \dot{\vec{\Pi}}_m + k^2 \dot{\vec{\Pi}}_m, \quad (5.6)$$

где векторная функция $\dot{\vec{\Pi}}_m$, называемая электрическим вектором Герца и связанная с векторным потенциалом $\dot{\vec{A}}_m$ соотношением: $\dot{\vec{A}}_m = i\omega\epsilon_a \dot{\vec{\Pi}}_m$, удовлетворяет уравнению (2.8) при $\dot{\vec{j}}_m^{cm} = 0$:

$$\Delta \dot{\vec{\Pi}}_m + k^2 \dot{\vec{\Pi}}_m = 0, \quad (5.7)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Если вектор $\dot{\vec{\Pi}}_m$ имеет только одну продольную составляющую:

$$\dot{\vec{\Pi}}_m = \vec{z}^0 \dot{U}_m^{\mathcal{O}}, \quad (5.8)$$

то формулы (5.6) определяют Е-волны, так как

$$\dot{H}_{mz} = i\omega\epsilon_a (\text{rot} \vec{z}^0 \dot{U}_m^{\mathcal{O}})_z = 0, \quad \text{а } \dot{E}_{mz} \neq 0.$$

Подставляя (5.8) в (5.6) и в (5.7), получим:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{mc} &= \dot{E}_m^{\mathcal{O}} = \text{grad} \text{div}(\vec{z}^0 \dot{U}_m^{\mathcal{O}}) + \vec{z}^0 k^2 \dot{U}_m^{\mathcal{O}}, \\ \dot{H}_{mc} &= \dot{H}_m^{\mathcal{O}} = i\omega\epsilon_a \text{rot}(\vec{z}^0 \dot{U}_m^{\mathcal{O}}), \end{aligned} \quad (5.9)$$

где функция \dot{U}_m^ϑ удовлетворяет однородному волновому уравнению:

$$\Delta \dot{U}_m^\vartheta + k^2 \dot{U}_m^\vartheta = 0. \quad (5.10)$$

Из принципа двойственности (раздел 3.4) следует, что наряду с решением (5.9) система уравнений (5.3) имеет также решение, представляемое в виде:

$$\dot{H}_{mc} = \dot{H}_m^M = \dot{E}_m^\vartheta \Big|_{\dot{U}_m^\vartheta = \dot{U}_m^M}, \quad \dot{E}_{mc} = \dot{E}_m^M = -\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} \dot{H}_m^\vartheta \Big|_{\dot{U}_m^\vartheta = \dot{U}_m^M}. \quad (5.11)$$

Подставляя (5.9) в (5.11), получим:

$$\begin{aligned} \dot{H}_m^M &= \text{grad} \, \text{div}(\bar{z}^0 \dot{U}_m^M) + \bar{z}^0 k^2 \dot{U}_m^M, \\ \dot{E}_m^M &= -i\omega\mu_a \text{rot}(\bar{z}^0 \dot{U}_m^M). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Функция \dot{U}_m^M , как и функция \dot{U}_m^ϑ , удовлетворяет однородному волновому уравнению:

$$\Delta \dot{U}_m^M + k^2 \dot{U}_m^M = 0. \quad (5.13)$$

Решение однородного волнового уравнения

При решении однородного волнового уравнения используем метод разделения переменных. В соответствии с этим методом представим решение уравнений (5.10), (5.13) в виде:

$$\dot{U}_m^{\vartheta, M} = T^{\vartheta, M}(x, y) \cdot Z^{\vartheta, M}(z). \quad (5.14)$$

Замечание: В дальнейшем при обозначении комплексных параметров и функций *точку*, как правило, будем опускать.

Подставим (5.14) в (5.10), (5.13) и разделим все члены на произведение $T^{\vartheta, M} \cdot Z^{\vartheta, M}$. В результате получим:

$$\frac{1}{T^{\vartheta,M}} \Delta_{\perp} T^{\vartheta,M} + \frac{1}{Z^{\vartheta,M}} \frac{d^2 Z^{\vartheta,M}}{dz^2} + k^2 = 0, \quad (5.15)$$

где $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - двумерный оператор Лапласа.

Рассмотрим первое слагаемое в (5.15). Оно может зависеть только от поперечных координат (X,Y). С другой стороны оно определяется через два других слагаемых, которые от X и Y не зависят. Следовательно, первое слагаемое не зависит от координат и является константой, которую обозначим

через $-(\chi^{\vartheta,M})^2$:

$$\frac{1}{T^{\vartheta,M}} \Delta_{\perp} T^{\vartheta,M} = -(\chi^{\vartheta,M})^2. \quad (5.16)$$

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что и второе слагаемое является константой, которую обозначим через $-(\Gamma^{\vartheta,M})^2$:

$$\frac{1}{Z^{\vartheta,M}} \frac{d^2 Z^{\vartheta,M}}{dz^2} = -(\Gamma^{\vartheta,M})^2. \quad (5.17)$$

Из (5.15)-(5.17) получим следующее уравнение, устанавливающее связь между константами:

$$(\Gamma^{\vartheta,M})^2 = k^2 - (\chi^{\vartheta,M})^2. \quad (5.18)$$

Рассмотрим уравнение (5.17), которое перепишем в виде:

$$\frac{d^2 Z^{\vartheta,M}}{dz^2} + (\Gamma^{\vartheta,M})^2 Z^{\vartheta,M} = 0. \quad (5.19)$$

Это уравнение имеет два линейно независимых решения:
 $Z_1^{\vartheta,M} = e^{-i\Gamma^{\vartheta,M}z}$, $Z_2^{\vartheta,M} = e^{i\Gamma^{\vartheta,M}z}$.

При положительных значениях $\Gamma^{\vartheta,M}$ функция $e^{-i\Gamma^{\vartheta,M}z}$ определяет плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Z, а функция $e^{i\Gamma^{\vartheta,M}z}$ определяет плоскую волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси Z.

В дальнейшем волны, соответствующие решению $e^{-i\Gamma z}$, будем называть волнами положительного направления, а волны, соответствующие

решению $e^{i\Gamma z}$, будем называть волнами отрицательного направления. При этом достаточно рассмотреть волны положительного направления, а чтобы получить выражения для волн отрицательного направления, нужно в выражениях для волн положительного направления заменить Γ на $-\Gamma$.

Отметим, что постоянная Γ называется постоянной распространения, а постоянная χ называется поперечным волновым числом.

Для волн положительного направления функция $\dot{U}_m^{\vartheta, M}$, определяемая выражением (5.14), представляется в виде:

$$\dot{U}_m^{\vartheta, M} = T^{\vartheta, M}(x, y)e^{-i\Gamma^{\vartheta, M}z}, \quad (5.20)$$

Используя (5.9), (5.12), (5.20), представим выражения для Е- волн и Н- волн положительного направления в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m^{\vartheta} &= (-i\Gamma^{\vartheta} \text{grad}_{\perp} T^{\vartheta} + \bar{z}^0 (\chi^{\vartheta})^2 T^{\vartheta}) e^{-i\Gamma^{\vartheta}z}, \\ \dot{\vec{H}}_m^{\vartheta} &= \dot{\vec{H}}_{m\perp}^{\vartheta} = \frac{1}{W^{\vartheta}} [\bar{z}^0, \dot{\vec{E}}_{m\perp}^{\vartheta}], \end{aligned} \quad (5.21)$$

где $W^{\vartheta} = \frac{\Gamma^{\vartheta}}{\omega \varepsilon_a}$ - волновое сопротивление Е- волн,

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\perp} &= \bar{x}^0 \frac{\partial}{\partial x} + \bar{y}^0 \frac{\partial}{\partial y}; \\ \dot{\vec{H}}_m^M &= (-i \text{grad}_{\perp} T^M + \bar{z}^0 (\chi^M)^2 T^M) e^{-i\Gamma^M z}, \\ \dot{\vec{E}}_m^M &= \dot{\vec{E}}_{m\perp}^M = W^M [\dot{\vec{H}}_{m\perp}^M, \bar{z}^0], \end{aligned} \quad (5.22)$$

где $W^M = \frac{\omega \mu_a}{\Gamma^M}$ - волновое сопротивление Н-волн.

Функция $T^{\vartheta, M}$ находится из решения уравнения (5.16), которое перепишем в виде:

$$\Delta_{\perp} T^{\vartheta, M} + (\chi^{\vartheta, M})^2 T^{\vartheta, M} = 0. \quad (5.23)$$

Если функция T^{ϑ} обращается в ноль на контуре L_{\perp} поперечного сечения волновода (рис. 5.2):

$$T^{\vartheta} \big|_{L_{\perp}} = 0, \quad (5.24)$$

то Е-волны, определяемые выражениями (5.21), удовлетворяют граничному условию (5.2'): $\dot{\vec{E}}_{m\tau}^{\mathcal{E}}|_{S_0} = 0$ и, следовательно, являются собственными волнами полого волновода.

Если производная функции T^M по нормали к контуру L_{\perp} равна нулю:

$$\left. \frac{\partial T^M}{\partial \nu} \right|_{L_{\perp}} = 0, \quad (5.25)$$

то Н-волны, определяемые выражениями (5.22), удовлетворяют граничному условию (5.2'): $\dot{\vec{E}}_{m\tau}^M|_{S_0} = 0$ и также являются собственными волнами полого волновода.

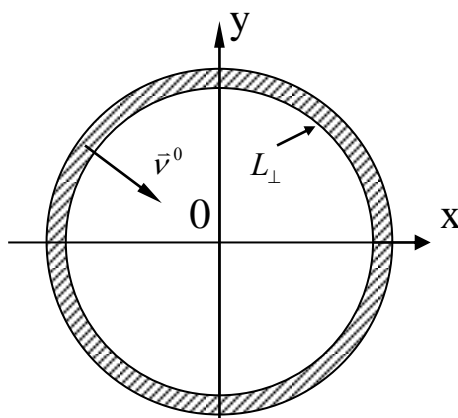


Рис. 5.2 Поперечное сечение полого волновода

На частных примерах будет показано, что уравнение (5.23) при условии (5.24), или (5.25) имеет ненулевое решение только при определенных значениях постоянной $(\chi^{\mathcal{E},M})^2$:

$$(\chi^{\mathcal{E},M})^2 = (\chi_{\ell}^{\mathcal{E},M})^2 > 0, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots$$

Эти значения называются собственными значениями двумерного оператора Лапласа Δ_{\perp} . Собственные значения образуют бесконечную последовательность чисел. При этом каждому собственному значению может соответствовать одно или несколько решений уравнения (5.23), которые называются собственными функциями двумерного оператора Лапласа. Если какому-либо собственному значению соответствует несколько собственных

функций, то соответствующие им собственные волны называются вырожденными.

Заметим, что аналитические выражения для собственных значений и собственных функций двумерного оператора Лапласа можно получить лишь для простых форм поперечного сечения волновода. Ниже будут рассмотрены собственные волны прямоугольного волновода, у которого контур поперечного сечения L_{\perp} - прямоугольник, и круглого волновода, у которого контур поперечного сечения - окружность.

Общие свойства собственных волн полых волноводов

В полом волноводе существует бесконечное множество собственных волн электрического типа (Е-волн) и бесконечное множество собственных волн магнитного типа (Н-волн). Каждая собственная волна характеризуется:

- а) поперечным волновым числом $\chi^{\mathcal{E},M} = \chi_{\ell} > 0$ (ℓ – номер волны, нумерация проводится в порядке возрастания числа χ_{ℓ});
- б) постоянной распространения $\Gamma^{\mathcal{E},M} = \Gamma_l$, которая определяется из уравнения связи (5.18):

$$\Gamma_l = \sqrt{k^2 - \chi_l^2}; \quad (5.26)$$

- в) критической длиной волны

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\chi_l}. \quad (5.27)$$

Используя (5.21), (5.22), представим выражения для собственных волн положительного направления $(\dot{\vec{E}}_{ml}^{(+)}, \dot{\vec{H}}_{ml}^{(+)})$ в виде:

$$\dot{\vec{E}}_{ml}^{(+)} = \dot{\vec{E}}_{ml}^{(+)}(x, y) \cdot e^{-i\Gamma_l z}, \quad \dot{\vec{H}}_{ml}^{(+)} = \dot{\vec{H}}_{ml}^{(+)}(x, y) \cdot e^{-i\Gamma_l z}. \quad (5.28)$$

Выражения для собственных волн отрицательного направления $(\dot{\vec{E}}_{ml}^{(-)}, \dot{\vec{H}}_{ml}^{(-)})$ получим из выражений (5.28), заменив в них Γ_{ℓ} на $-\Gamma_{\ell}$:

$$\dot{\vec{E}}_{ml}^{(-)} = \dot{\vec{E}}_{ml}^{(-)}(x, y) \cdot e^{i\Gamma_l z}, \quad \dot{\vec{H}}_{ml}^{(-)} = \dot{\vec{H}}_{ml}^{(-)}(x, y) \cdot e^{i\Gamma_l z}. \quad (5.29)$$

При этом, как следует из (5.26), постоянные распространения для волн положительного направления могут принимать либо положительные значения при $\chi_l^2 < k^2$, либо чисто мнимые значения:

$$\Gamma_l = -i\sqrt{\chi_l^2 - k^2} \quad (\text{при } \chi_l^2 > k^2). \quad (5.30)$$

Отметим, что любая собственная волна удовлетворяет системе уравнений электродинамики (5.1) и граничным условиям (5.2). Однако ни одна из собственных волн не удовлетворяет условию на бесконечности при $z \rightarrow (\pm \infty)$. Поэтому никакая линейная комбинация собственных волн не может быть решением задачи возбуждения волновода.

Используя (5.27), представим выражение для постоянных распространения собственных волн положительного направления в виде:

$$\Gamma_l = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kpl}} \right)^2}, \quad (5.31)$$

где $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ - длина ПОВ, распространяющейся в идеальном диэлектрике с параметрами ϵ, μ . При воздушном заполнении волновода ($\epsilon \approx 1, \mu = 1$) $\lambda = \lambda_0 = c/f$, где c - скорость света в вакууме, а f - частота волны.

Собственные волны, у которых $\lambda_{kpl} > \lambda$, имеют положительные постоянные распространения и представляют плоские неоднородные волны, распространяющиеся в положительном направлении оси Z . Амплитуда этих волн, в отличие от однородных, зависит от поперечных координат X, Y .

Собственные волны, у которых $\lambda_{kpl} < \lambda$, имеют чисто мнимые значения постоянных распространения и представляют поля, затухающие в положительном направлении оси z по экспоненциальному закону. Такие поля также называют затухающими, или запердевыми собственными волнами, хотя они и не имеют волнового характера.

Отметим, что экспоненциальное затухание запердевых волн идеального волновода не связано с потерями энергии.

Если собственные волны пронумеровать в порядке возрастания χ_l ($\chi_1 \leq \chi_2 \leq \chi_3 \dots \leq \dots$), то волна с номером $\ell=1$ имеет, как следует из (5.27), максимальное значение критической длины волны. Эта волна называется основной волной. Остальные собственные волны называются высшими волнами.

Обозначим критическую длину основной волны через λ_{kp0} . Если $\lambda > \lambda_{kp0}$, то все собственные волны являются затухающими.

При укорочении длины волны λ (при росте частоты f) основная волна первой переходит из запердельной в распространяющуюся волну. Следующая волна (с номером $\ell=2$), переходящая из запердельной в распространяющуюся, называется первой высшей волной.

Обозначим критическую длину первой высшей волны через λ_{kp1} . Если выполняется условие:

$$\lambda_{kp1} < \lambda < \lambda_{kp0}, \quad (5.32)$$

то в полном волноводе распространяется только одна основная волна, а все высшие волны являются запердельными. Такой режим работы волновода называется одномодовым режимом.

Отметим, что электромагнитная энергия по волноводу переносится только распространяющимися волнами и в случае одномодового режима переносится только основной волной.

Для распространяющихся собственных волн (их всегда конечное число) можно ввести понятия фазовой скорости $V_{\phi\ell}$ и длины волны в волноводе Λ_ℓ . Они определяются так же, как и для ПОВ в свободном пространстве (раздел 2.6). При этом расчетные формулы для $V_{\phi\ell}$ и Λ_ℓ

можно представить в виде: $V_{\phi\ell} = \frac{\omega}{\Gamma_\ell}$, $\Lambda_\ell = \frac{2\pi}{\Gamma_\ell}$. Подставляя в эти формулы выражение для Γ_ℓ (5.31), получим:

$$V_{\phi\ell} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\kappa p\ell}}\right)^2}}, \quad (5.33)$$

$$\Lambda_\ell = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\kappa p\ell}}\right)^2}}, \quad (5.34)$$

где $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$; $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Запредельные собственные волны ($\lambda > \lambda_{\kappa pl}$) не имеют волнового характера, поэтому понятия фазовой скорости и длины волны для них лишены физического смысла. Расчеты по формулам (5.33), (5.34) при $\lambda > \lambda_{\kappa pl}$ дают чисто мнимые значения $V_{\phi l}$ и Λ_l .

5.3. Собственные волны прямоугольного волновода

Поперечное сечение прямоугольного волновода показано на рис.5.3. Контур поперечного сечения L_\perp - прямоугольник со сторонами a, b .

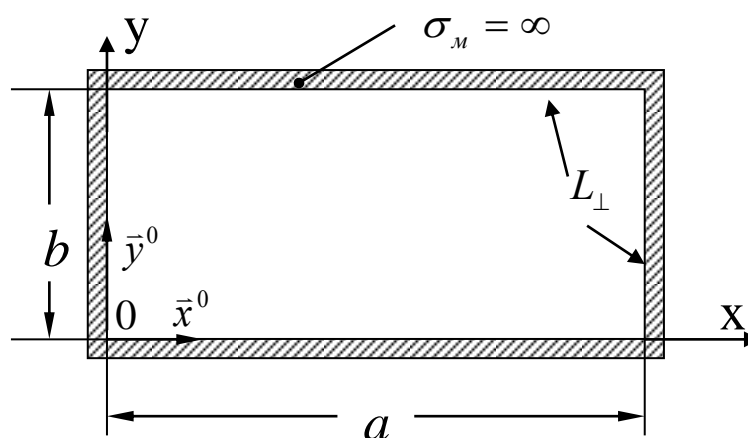


Рис. 5.3. Поперечное сечение прямоугольного волновода

Волновод может быть заполнен однородным диэлектриком с параметрами ε, μ . Так как удельная проводимость оболочки волновода предполагается равной бесконечности, то поле в волноводе не зависит от толщины стенок t .

Собственные волны определяются выражениями (5.21), (5.22), где функция $T^{\vartheta, M}$ удовлетворяет уравнению (5.23). Представляя двумерный оператор Лапласа в декартовых координатах, перепишем уравнение (5.23) в виде:

$$\frac{\partial^2 T^{\vartheta, M}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{\vartheta, M}}{\partial y^2} + (\chi^{\vartheta, M})^2 T^{\vartheta, M} = 0. \quad (5.35)$$

Для Е-волн функция T^{ϑ} должна удовлетворять краевому условию (5.24), которое, с учетом формы поперечного сечения волновода (рис. 5.3.), записывается в виде:

$$\text{а) } T^{\vartheta} \Big|_{x=0} = 0, \text{ б) } T^{\vartheta} \Big|_{x=a} = 0, \text{ в) } T^{\vartheta} \Big|_{y=0} = 0, \text{ г) } T^{\vartheta} \Big|_{y=b} = 0. \quad (5.36)$$

Для Н-волн функция T^M должна удовлетворять краевому условию (5.25), которое записывается в виде:

$$\text{а) } \frac{\partial T^M}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \text{ б) } \frac{\partial T^M}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0, \text{ в) } \frac{\partial T^M}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \text{ г) } \frac{\partial T^M}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0. \quad (5.37)$$

Задача нахождения решений уравнения (5.35), удовлетворяющих краевым условиям (5.36), называется первой краевой задачей на собственные значения и собственные функции оператора Δ_{\perp} .

Задача нахождения решений уравнения (5.35), удовлетворяющих граничным условиям (5.37), называется второй краевой задачей на собственные значения и собственные функции оператора Δ_{\perp} .

Решение краевых задач можно получить методом разделения переменных. Следуя этому методу, представим функцию $T^{\vartheta, M}$ в виде произведения:

$$T^{\vartheta, M}(x, y) = X^{\vartheta, M}(x) Y^{\vartheta, M}(y). \quad (5.38)$$

Подставим (5.38) в уравнение (5.35) и разделим все члены уравнения на произведение XY . В результате получим следующее соотношение:

$$\frac{1}{X^{\vartheta,M}} \frac{d^2 X^{\vartheta,M}}{dx^2} + \frac{1}{Y^{\vartheta,M}} \frac{d^2 Y^{\vartheta,M}}{dy^2} + (\chi^{\vartheta,M})^2 = 0. \quad (5.39)$$

Первое и второе слагаемые в (5.39) могут зависеть только от X и Y , соответственно, но их сумма есть величина постоянная. Поэтому и первое и второе слагаемые в (5.39) – константы. Обозначая первое через $-(k_x^{\vartheta,M})^2$, а второе через $-(k_y^{\vartheta,M})^2$, получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2 X^{\vartheta,M}}{dx^2} + (k_x^{\vartheta,M})^2 X^{\vartheta,M} = 0, \quad (5.40)$$

$$\frac{d^2 Y^{\vartheta,M}}{dy^2} + (k_y^{\vartheta,M})^2 Y^{\vartheta,M} = 0. \quad (5.41)$$

Подставляя (5.38) в краевые условия (5.36), (5.37), получим:

$$\text{а) } X^{\vartheta} \big|_{x=0} = 0, \text{ б) } X^{\vartheta} \big|_{x=a} = 0, \text{ в) } Y^{\vartheta} \big|_{y=0} = 0, \text{ г) } Y^{\vartheta} \big|_{y=b} = 0, \quad (5.42)$$

$$\text{а) } \frac{dX^M}{dx} \big|_{x=0} = 0, \text{ б) } \frac{dX^M}{dx} \big|_{x=a} = 0, \text{ в) } \frac{dY^M}{dy} \big|_{y=0} = 0, \text{ г) } \frac{dY^M}{dy} \big|_{y=b} = 0. \quad (5.43)$$

Представим общее решение уравнений (5.40), (5.41) в виде:

$$X^{\vartheta,M} = A_x^{\vartheta,M} \cos k_x^{\vartheta,M} x + B_x^{\vartheta,M} \sin k_x^{\vartheta,M} x,$$

$$Y^{\vartheta,M} = A_y^{\vartheta,M} \cos k_y^{\vartheta,M} y + B_y^{\vartheta,M} \sin k_y^{\vartheta,M} y.$$

Используя краевые условия (5.42а), (5.42в), (5.43а), (5.43в), найдем, что $A_x^{\vartheta} = 0$, $A_y^{\vartheta} = 0$, $B_x^M = 0$, $B_y^M = 0$.

Таким образом получим следующие выражения для функций $X^{\vartheta,M}$, $Y^{\vartheta,M}$:

$$X^{\vartheta} = B_x^{\vartheta} \sin k_x^{\vartheta} x, \quad Y^{\vartheta} = B_y^{\vartheta} \sin k_y^{\vartheta} y. \quad (5.44)$$

$$X^M = A_x^M \cos k_x^M x, \quad Y^M = A_y^M \cos k_y^M y. \quad (5.45)$$

Используя краевые условия (5.42б), (5.42г), находим, что:

$$k_x^{\mathcal{O}} = k_{xm}^{\mathcal{O}} = \frac{\pi}{a} m, \quad m=1,2,\dots, \quad (5.46)$$

$$k_y^{\mathcal{O}} = k_{yn}^{\mathcal{O}} = \frac{\pi}{b} n, \quad n=1,2,\dots, \quad (5.47)$$

$$k_x^M = k_{xm}^M = \frac{\pi}{a} m, \quad m=(0),1,2,\dots, \quad (5.48)$$

$$k_y^M = k_{yn}^M = \frac{\pi}{b} n, \quad n=(0),1,2,\dots, \quad (5.49)$$

Для Н-волн одно из чисел m или n может быть равно нулю. Это отмечено в формулах (5.48), (5.49) взятием нуля в круглые скобки.

Используя (5.39), (5.40), (5.41), (5.46) - (5.49), представим выражение для поперечного волнового числа $\chi^{\mathcal{O},M}$ в виде:

$$\chi^{\mathcal{O},M} = \chi_{mn}^{\mathcal{O},M} = \sqrt{(k_{xm}^{\mathcal{O},M})^2 + (k_{yn}^{\mathcal{O},M})^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a} m\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} n\right)^2}. \quad (5.50)$$

Используя (5.38), (5.44)-(5.49), представим выражения для функций $T^{\mathcal{O}}$ и T^M в виде:

$$T^{\mathcal{O}} = T_{mn}^{\mathcal{O}} = C_{mn}^{\mathcal{O}} \sin \frac{\pi}{a} mx \cdot \sin \frac{\pi}{b} ny, \quad m,n=1,2,\dots, \quad (5.51)$$

$$T^M = T_{mn}^M = C_{mn}^M \cos \frac{\pi}{a} mx \cdot \cos \frac{\pi}{b} ny, \quad m,n=(0),1,2,\dots, \quad (5.52)$$

где $C_{mn}^{\mathcal{O},M}$ - постоянные коэффициенты.

Постоянные распространения собственных волн $\Gamma^{\mathcal{O},M}$ определяются из уравнения связи (5.18):

$$\Gamma^{\mathcal{O},M} = \Gamma_{mn}^{\mathcal{O},M} = \sqrt{k^2 - (\chi_{mn}^{\mathcal{O},M})^2}. \quad (5.53)$$

Выражения для постоянных распространения можно также представить в следующем виде:

$$\Gamma_{mn}^{\vartheta, M} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{крmn}^{\vartheta, M}} \right)^2}, \quad (5.54)$$

где

$$\lambda_{кр. mn}^{\vartheta, M} = \frac{2\pi}{\chi_{mn}^{\vartheta, M}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}}. \quad (5.55)$$

Подставляя (5.51), (5.52), в (5.21), (5.22), получим следующие выражения для собственных волн положительного направления:

$$\begin{aligned} \dot{E}_m^{\vartheta} = \dot{E}_{m(mn)}^{\vartheta} = C_{mn}^{\vartheta} & \left\{ -i\Gamma^{\vartheta} \left[\begin{aligned} & \vec{x}^{\vartheta} \frac{\pi}{a} m \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a} mx\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b} ny\right) + \\ & + \vec{y}^0 \frac{\pi}{b} n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} mx\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{b} ny\right) \end{aligned} \right] + \right. \\ & \left. + \vec{z}^0 (\chi_{mn}^{\vartheta})^2 \sin\left(\frac{\pi}{a} mx\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b} ny\right) \right\} \cdot e^{-i\Gamma_{mn}^{\vartheta} z}, \\ \dot{H}_m^{\vartheta} = \dot{H}_{m\perp}^{\vartheta} = \dot{H}_{m(mn)\perp}^{\vartheta} & = \frac{1}{W_{mn}^{\vartheta}} \left[\vec{z}^0, \dot{E}_{m(mn)\perp}^{\vartheta} \right], \quad m, n=1, 2, \dots, \dots, \end{aligned} \quad (5.56)$$

где

$$W_{mn}^{\vartheta} = \frac{\Gamma_{mn}^{\vartheta}}{\omega \varepsilon_a} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{крmn}^{\vartheta}} \right)^2},$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_m^M = \dot{H}_{m(mn)}^M = C_{mn}^M & \left\{ i\Gamma^M \left[\begin{aligned} & \vec{x}^0 \frac{\pi}{a} m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} mx\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{b} ny\right) + \\ & + \vec{y}^0 \frac{\pi}{b} n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a} mx\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b} ny\right) \end{aligned} \right] + \right. \\ & \left. + \vec{z}^0 (\chi_{mn}^M)^2 \cos\left(\frac{\pi}{a} mx\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{b} ny\right) \right\} \cdot e^{-i\Gamma_{mn}^M z}, \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{E}}_m^M = \dot{\vec{E}}_{m\perp}^M = \dot{\vec{E}}_{m(mn)\perp}^M = W_{mn}^M \left[\dot{\vec{H}}_{m(mn)\perp}^M, \vec{z}^0 \right], \quad m, n = (0), 1, 2, \dots, \quad (5.57)$$

где
$$W_{mn}^M = \frac{\omega \mu_a}{\Gamma_{mn}^M} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{крmn}^M} \right)^2},$$

$\vec{x}^0, \vec{y}^0, \vec{z}^0$ - единичные векторы, параллельные осям X, Y, Z .

E – волны $(\dot{\vec{E}}_m^\ominus, \dot{\vec{H}}_m^\ominus)$ и H – волны $(\dot{\vec{E}}_m^M, \dot{\vec{H}}_m^M)$ в прямоугольном волноводе обозначаются как E_{mn} и H_{mn} , соответственно.

E - и H -волны при одинаковых значениях чисел m и n имеют одинаковые значения постоянной распространения Γ , поперечного волнового числа χ и критической длины волны $\lambda_{кр}$, определяемые выражениями (5.50), (5.54), (5.55), и, следовательно, являются вырожденными волнами. Каждой паре значений m и n соответствует одна собственная волна электрического типа (E - волна) и одна собственная волна магнитного типа (H - волна).

Число m определяет число полуволновых вариаций поля по оси x , а число n - по оси y .

Рассмотрим основную волну.

Из анализа выражения (5.55) видно, что максимальное значение критической длины волны имеет та волна, у которой числа m и n принимают минимально возможные значения.

Минимальные значения для E -волн: $m = 1, n = 1$, а для H -волн: $m = 1, n = 0$, или $m = 0, n = 1$.

Таким образом, основной волной прямоугольного волновода является либо волна H_{10} , критическая длина которой $\lambda_{кр10}^M = 2a$, либо волна H_{01} , критическая длина которой $\lambda_{кр01}^M = 2b$. Для определенности принято считать, что $a \geq b$. Поэтому при $a > b$ основной волной является волна H_{10} , а при $a = b$ - две основные волны: H_{10} и H_{01} .

Обозначим критическую длину основной волны через $\lambda_{кро}$. Если $\lambda > \lambda_{кро}$, то основная и все высшие волны являются затухающими.

Если $\lambda_{кр1в} < \lambda < \lambda_{кр0}$, где $\lambda_{кр1в}$ - критическая длина первой высшей волны, то основная волна является распространяющейся волной, а все высшие волны являются запердельными. Такой режим, как было отмечено выше, называется одномодовым.

Первой высшей волной (при $a > b$) является либо волна H_{01} , либо волна H_{20} , критическая длина которой $\lambda_{кр20}^M = a$.

Для широкого волновода ($b > \frac{a}{2}$) первой высшей волной является волна H_{01} , для узкого волновода ($b < \frac{a}{2}$), первой высшей волной является волна H_{20} .

Используя формулы (5.57), представим выражение для поля основной волны H_{10} ($\dot{E}_{m0}, \dot{H}_{m0}$) в виде:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{m0} &= \bar{y}^0 \dot{E}_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\Gamma_0 z}, \\ \dot{H}_{m0} &= -\frac{\dot{E}_0}{W_0} \left(\bar{x}^0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) - \bar{z}^0 \frac{\pi}{\Gamma_0 a} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \right) e^{-i\Gamma_0 z},\end{aligned}\quad (5.58)$$

где $\Gamma_0 = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$ - постоянная распространения основной волны,

$W_0 = \frac{\sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}$ - волновое сопротивление основной волны,

$\dot{E}_0 = -C_{10}^M i \Gamma_0 W_0 \frac{\pi}{a}$ - амплитудный коэффициент.

Из анализа выражений (5.58) следует, что силовые линии вектора напряженности электрического поля — прямые, параллельные оси y . Амплитуда электрического поля максимальна в середине широкой стенки ($x = a/2$) и равна $|A|$.

Силовые линии магнитного поля представляют петли, расположенные в плоскости $хоz$. Проекции силовых линий магнитного поля на плоскость

поперечного сечения – прямые линии, не заканчивающиеся на боковых стенках ($x = 0$ и $x = a$).

5.4. Собственные волны круглого волновода

Поперечное сечение круглого волновода показано на рис.5.4. Контур поперечного сечения L_{\perp} - окружность ($r = a$).

При построении системы собственных волн используем цилиндрические координаты r, α, z . В цилиндрической системе координат выражение для $\Delta_{\perp} T$ и $grad_{\perp} T$ представляются в виде:

$$\Delta_{\perp} T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2}, \quad (5.59)$$

$$grad_{\perp} T = \vec{r}^0 \frac{\partial T}{\partial r} + \vec{\alpha}^0 \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \alpha}. \quad (5.60)$$

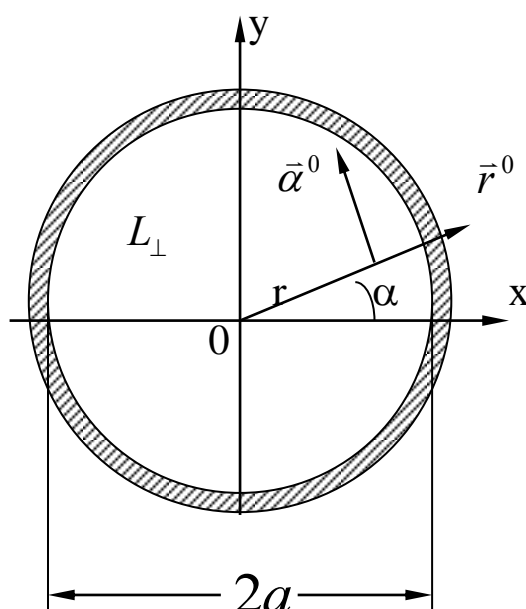


Рис.5.4. Поперечное сечение круглого волновода

Собственные волны определяются выражениями (5.20) – (5.22), где функция $T^{\vartheta,M}$ удовлетворяет уравнению (5.23), которое с учетом (5.59) записывается в виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{\vartheta,M}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T^{\vartheta,M}}{\partial \alpha^2} + (\chi^{\vartheta,M})^2 T^{\vartheta,M} = 0. \quad (5.61)$$

Для Е - волн функция T^{ϑ} удовлетворяет краевому условию (5.24), которое, с учетом формы поперечного сечения волновода (рис.5.4.), записывается в виде:

$$T^{\vartheta} \Big|_{r=a} = 0. \quad (5.62)$$

Для Н – волн функция T^M удовлетворяет краевому условию (5.25), которое для круглого волновода записывается в виде:

$$\frac{\partial T^M}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0. \quad (5.63)$$

Уравнение (5.61) решаем методом разделения переменных. В соответствии с этим методом представляем функцию $T^{\vartheta,M}$ в виде произведения:

$$T^{\vartheta,M}(r, \alpha) = R^{\vartheta,M}(r) A^{\vartheta,M}(\alpha). \quad (5.64)$$

Умножим обе части уравнения (5.61) на r^2 , затем подставим в него выражение (5.64) и разделим все члены на произведение $R^{\vartheta,M} A^{\vartheta,M}$. В результате получим следующее соотношение:

$$\frac{1}{A^{\vartheta,M}} \frac{d^2 A^{\vartheta,M}}{d\alpha^2} + \frac{1}{R^{\vartheta,M}} r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR^{\vartheta,M}}{dr} \right) + r^2 (\chi^{\vartheta,M})^2 = 0. \quad (5.65)$$

Первое слагаемое может зависеть только от одной переменной α . С другой стороны, оно равно со знаком “минус” сумме двух других слагаемых, которые от α не зависят. Это возможно лишь в том случае, если первое слагаемое равно некоторой константе, которую обозначим через $(-n^2)$. При этом из соотношений (5.65) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 A^{\vartheta, M}}{d\alpha^2} + n^2 A^{\vartheta, M} = 0, \quad (5.66)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR^{\vartheta, M}}{dr} \right) + \left[(\chi^{\vartheta, M})^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] R^{\vartheta, M} = 0. \quad (5.67)$$

Как следует из (5.62) – (5.64) функция R^{ϑ} удовлетворяет краевому условию :

$$R^{\vartheta} \Big|_{r=a} = 0, \quad (5.68)$$

а функция R^M удовлетворяет краевому условию:

$$\frac{dR^M}{dr} \Big|_{r=a} = 0. \quad (5.69)$$

Уравнение (5.66) имеет два линейно независимых решения:

$$A_1^{\vartheta, M} = \cos n\alpha; A_2^{\vartheta, M} = \sin n\alpha. \quad (5.70)$$

При изменении угла α на 2π приходим в ту же точку волновода, поэтому функции $A_{1,2}^{\vartheta, M}$ должны быть периодическими с периодом 2π :

$\cos n\alpha = \cos n(\alpha + 2\pi); \sin n\alpha = \sin n(\alpha + 2\pi)$. Отсюда следует, что n - целое число ($n=0,1,2,\dots$).

Уравнение (5.67) имеет два линейно независимых решения: $R_1^{\vartheta, M} = J_n(\chi^{\vartheta, M} r); R_2^{\vartheta, M} = N_n(\chi^{\vartheta, M} r)$, где $J_n(x)$ - функция Бесселя n -ого порядка; $N_n(x)$ - функция Неймана n -ого порядка.

Так как функция $N_n(x) \Big|_{x \rightarrow 0} \rightarrow \infty$, то в качестве решения уравнения (5.67), из физических соображений, нужно взять функцию Бесселя:

$$R^{\vartheta, M}(r) = J_n(\chi^{\vartheta, M} r). \quad (5.71)$$

Используя краевые условия (5.68), (5.69), получим следующие уравнения для нахождения поперечного волнового числа $\chi^{\vartheta, M}$:

$$J_n(\chi^{\vartheta} a) = 0, \quad (5.72)$$

$$J'_n(\chi^M a) = 0, \quad (5.73)$$

где $J'_n(\chi^M a)$ - производная функции Бесселя по полному аргументу.

Из уравнения (5.72) находим:

$$\chi_{nm}^{\mathfrak{A}} = \frac{B_{nm}}{a}, \quad (5.74)$$

где B_{nm} - корни функции Бесселя:

$$J_n(B_{nm}) = 0. \quad (5.75)$$

Из уравнения (5.73) находим:

$$\chi_{nm}^M = \frac{A_{nm}}{a}, \quad (5.76)$$

где A_{nm} - корни производной функции Бесселя:

$$J'_n(A_{nm}) = 0. \quad (5.77)$$

Функция Бесселя, корни функции Бесселя и ее производной табулированы, а также могут быть вычислены с применением численных методов на ЭВМ.

При больших значениях аргумента x для функции Бесселя можно получить простую аналитическую формулу:

$J_n(x)|_{x \gg 1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{\pi}{2}(n + \frac{1}{2}))$, из которой видно, что функция Бесселя и ее производная имеют бесконечное множество корней: B_{nm}, A_{nm} ($n=0,1,2,\dots$ - порядок функции Бесселя; $m=1,2,\dots$ - номер корня). Ниже приведены несколько первых значений корней в порядке их возрастания:

$$B_{01} = 2.405, B_{11} = 3.832, B_{21} = 5.136, \quad (5.78)$$

$$A_{11} = 1.841, A_{21} = 3.054, A_{01} = 3.832. \quad (5.79)$$

Используя (5.64),(5.70),(5.71), представим выражение для функции $T^{\mathfrak{A},M}$ в виде:

$$T^{\mathfrak{A},M} = T_{nm\left\{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}\right\}}^{\mathfrak{A},M} = C_{nm\left\{\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}\right\}}^{\mathfrak{A},M} J_n(\chi_{nm}^{\mathfrak{A},M} r) \begin{Bmatrix} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{Bmatrix}. \quad (5.80)$$

Выражение (5.80) объединяет две функции $T_1^{\mathfrak{A},M}$ и $T_2^{\mathfrak{A},M}$: первая изменяется от угла α по закону $\cos n\alpha$, вторая – по закону $\sin n\alpha$.

Подставляя (5.80) в формулы (5.21),(5.22) и используя при вычислении $grad_{\perp} T$ формулу (5.60), можно получить выражения для собственных волн круглого волновода.

Постоянные распространения собственных волн определяются из уравнения связи(5.18) :

$$\Gamma^{\mathcal{E},M} = \Gamma_{nm}^{\mathcal{E},M} = \sqrt{(k^2 - (\chi_{nm}^{\mathcal{E},M})^2)} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{крнт}^{\mathcal{E},M}} \right)^2}, \quad (5.81)$$

где $\lambda_{крнт}^{\mathcal{E},M} = \frac{2\pi}{\chi_{nm}^{\mathcal{E},M}}$ - критическая длина волны для Е- и Н -волн.

Используя (5.74), (5.76) , представим выражение для $\lambda_{крнт}^{\mathcal{E},M}$ в виде:

$$\lambda_{крнт}^{\mathcal{E}} = \frac{2\pi a}{B_{nm}}, \quad (5.82)$$

- 40 -

$$\lambda_{крнт}^M = \frac{2\pi a}{A_{nm}}. \quad (5.83)$$

В круглом волноводе Е- волны обозначаются E_{nm} , а Н-волны - H_{nm} , в отличие от прямоугольного волновода, в котором Е- волны обозначаются E_{mn} , а Н-волны - H_{mn} .

Из выражений (5.78), (5.79), (5.82), (5.83) следует, что основной волной круглого волновода является волна H_{11} , так как она имеет максимальную критическую длину волны: $\lambda_{кр0} = \frac{2\pi a}{A_{11}} \approx 3,41a$, а первой высшей волной – волна E_{01} , у которой критическая длина волны равна:

$$\lambda_{кр1\mathcal{E}} = \frac{2\pi a}{B_{01}} \approx 2,61a .$$

В диапазоне волн: $2,61a < \lambda < 3,41a$ в круглом волноводе распространяется только одна основная волна.

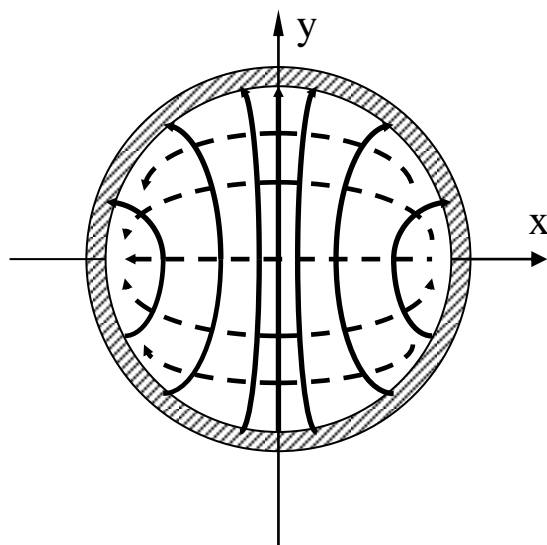


Рис. 5.5. Структура поля волны H_{11} в поперечном сечении круглого волновода

Структура поля основной волны в круглом волноводе аналогична структуре поля основной волны в прямоугольном волноводе. На рис.5.5. показаны силовые линии электрического поля (сплошные кривые) и проекции силовых линий магнитного поля на плоскость поперечного сечения волновода (пунктирные кривые). Силовые линии построены при использовании функции T^M , изменяющейся от угла α по закону $\cos \alpha$. При использовании функции T^M , изменяющаяся от угла α по закону $\sin \alpha$, картина силовых линий останется прежней, но повернется на 90° .

5.5. Решение задачи возбуждения полых волноводов

Представим решение системы (5.1) вне области источников V' (рис.5.1.), в виде разложения по собственным волнам положительного направления (5.28) при $z > z'_2$, и по собственным волнам отрицательного направления (5.29) при $z < z'_1$:

$$\dot{\vec{E}}_m = \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(+)} \dot{\vec{E}}_{ml}^{(+)}, \quad \dot{\vec{H}}_m = \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(+)} \dot{\vec{H}}_{ml}^{(+)}, \quad z > z'_2, \quad (5.84)$$

$$\dot{\vec{E}}_m = \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(-)} \dot{\vec{E}}_{ml}^{(-)}, \quad \dot{\vec{H}}_m = \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(-)} \dot{\vec{H}}_{ml}^{(-)}, \quad \Sigma < \Sigma_l^I. \quad (5.85)$$

Выражения (5.84), (5.85) удовлетворяют уравнениям электродинамики (5.1), граничному условию (5.2) и условию на бесконечности : собственные волны положительного направления имеют либо характер распространяющихся, либо затухающих волн при $Z \rightarrow \infty$, а собственные волны отрицательного направления представляют либо распространяющиеся, либо затухающие волны при $Z \rightarrow (-\infty)$. При выполнении этих условий задача возбуждения имеет единственное решение и сводится к нахождению коэффициентов разложения $C_l^{(\pm)}$ в рядах (5.84), (5.85), которые можно получить, используя лемму Лоренца в интегральной форме (3.25).

Лемма Лоренца устанавливает связь между комплексными амплитудами полей двух систем источников и, с учетом сторонних магнитных токов, представляет следующее математическое соотношение:

$$\oint_S \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_{m1}, \dot{\vec{H}}_{m2} \right] - \left[\dot{\vec{E}}_{m2}, \dot{\vec{H}}_{m1} \right] \right\} \cdot \vec{\nu}^0 ds = \\ = \int_V (\dot{j}_{m1}^{cm} \dot{\vec{E}}_{m2} - \dot{j}_{m2}^{cm} \dot{\vec{E}}_{m1} - \dot{j}_{m1}^{Mcm} \dot{\vec{H}}_{m2} + \dot{j}_{m2}^{Mcm} \dot{\vec{H}}_{m1}) dv, \quad (5.86)$$

где V - произвольная область, ограниченная замкнутой поверхностью S ;

$\vec{\nu}^0$ - внешняя по отношению к области V единичная нормаль к поверхности S .

Применим лемму Лоренца к области V , представляющей отрезок волновода, ограниченный двумя поперечными плоскостями:

$S_1(z_1 \leq z_1')$ и $S_2(z_2 \geq z_2')$ (рис. 5.1).

Полагая в (5.86):

$$\dot{j}_{m1}^{cm} = \dot{j}_m^{cm}, \dot{j}_{m1}^{Mcm} = \dot{j}_m^{Mcm}; \quad \dot{\vec{E}}_{m1} = \dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_{m1} = \dot{\vec{H}}_m,$$

где $\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m$ - поле в волноводе, возбужденное сторонними токами с плотностями \dot{j}_m^{cm} и \dot{j}_m^{mcm} ; $\dot{j}_{m2}^{cm} = 0, \dot{j}_{m2}^{mcm} = 0, \dot{\vec{E}}_{m2} = \dot{\vec{E}}_{mk}^{(+)}, \dot{\vec{H}}_{m2} = \dot{\vec{H}}_{mk}^{(+)}$,

где $\dot{\vec{E}}_{mk}^{(+)}, \dot{\vec{H}}_{mk}^{(+)}$ - собственная волна положительного направления с номером k , получим следующее соотношение:

$$\oint_S \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_{mk}^{(+)} \right] - \left[\dot{\vec{E}}_{mk}^{(+)}, \dot{\vec{H}}_m \right] \right\} \vec{\nu}^0 ds = Q_k^{(+)}, \quad (5.87)$$

где

$$Q_k^{(+)} = \int_V \left(\dot{j}_m^{cm} \dot{\vec{E}}_{mk}^{(+)} - \dot{j}_m^{mcm} \dot{\vec{H}}_{mk}^{(+)} \right) dv. \quad (5.88)$$

Интеграл по поверхности S представим в виде суммы трех интегралов: по S_1 , по S_2 , по S_0 , где S_0 - поверхность идеально проводящей оболочки отрезка волновода ($z_1 \leq z \leq z_2$) (рис. 5.1.). Интеграл по S_0 , в силу граничного условия (5.2), равен нулю:

$$\begin{aligned} & \int_{S_0} \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_{mk}^{(+)} \right] - \left[\dot{\vec{E}}_{mk}^{(+)}, \dot{\vec{H}}_m \right] \right\} \vec{\nu}^0 ds = \\ & = \int_{S_0} \left\{ \left[\vec{\nu}^0, \dot{\vec{E}}_m \right] \dot{\vec{H}}_{mk}^{(+)} - \left[\vec{\nu}^0, \dot{\vec{E}}_{mk}^{(+)} \right] \dot{\vec{H}}_m \right\} ds = \\ & = \int_{S_0} \left\{ \left[\vec{\nu}^0, \dot{\vec{E}}_{m\tau} \right] \dot{\vec{H}}_{mk}^{(+)} - \left[\vec{\nu}^0, \dot{\vec{E}}_{mk\tau}^{(+)} \right] \dot{\vec{H}}_m \right\} ds = 0 \end{aligned}$$

Подставляя в (5.87) выражения для $\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m$ в виде разложений (5.84), (5.85) и выражения для $\dot{\vec{E}}_{mk}^{(+)}, \dot{\vec{H}}_{mk}^{(+)}$ в виде (5.28), получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(-)} e^{i(\Gamma_l - \Gamma_k)z_1} \int_{S_{\perp}} \left\{ \left[\begin{array}{c} \dot{\vec{E}}_{ml}^{(-)}, \dot{\vec{H}}_{mk}^{(+)} \\ \dot{\vec{E}}_{mk}^{(+)}, \dot{\vec{H}}_{ml}^{(-)} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \dot{\vec{E}}_{mk}^{(+)}, \dot{\vec{H}}_{ml}^{(-)} \\ \dot{\vec{E}}_{ml}^{(-)}, \dot{\vec{H}}_{mk}^{(+)} \end{array} \right] \right\} \bar{z}^0 ds + \\
& + \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(+)} e^{-i(\Gamma_l + \Gamma_k)z_2} \int_{S_{\perp}} \left\{ \left[\begin{array}{c} \dot{\vec{E}}_{ml}^{(+)}, \dot{\vec{H}}_{mk}^{(+)} \\ \dot{\vec{E}}_{mk}^{(+)}, \dot{\vec{H}}_{ml}^{(+)} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \dot{\vec{E}}_{mk}^{(+)}, \dot{\vec{H}}_{ml}^{(+)} \\ \dot{\vec{E}}_{ml}^{(+)}, \dot{\vec{H}}_{mk}^{(+)} \end{array} \right] \right\} \bar{z}^0 ds = Q_k^{(+)} , \quad (5.89)
\end{aligned}$$

где S_{\perp} - поперечное сечение волновода.

Используя лемму Лоренца (5.86) для двух собственных волн одного направления: $\left\{ \begin{array}{c} \dot{\vec{E}}_{ml}^{(\pm)}, \dot{\vec{H}}_{ml}^{(\pm)} \end{array} \right\}$ и $\left\{ \begin{array}{c} \dot{\vec{E}}_{mk}^{(\pm)}, \dot{\vec{H}}_{mk}^{(\pm)} \end{array} \right\}$ и двух собственных волн разных направлений: $\left\{ \begin{array}{c} \dot{\vec{E}}_{ml}^{(-)}, \dot{\vec{H}}_{ml}^{(-)} \end{array} \right\}$ и $\left\{ \begin{array}{c} \dot{\vec{E}}_{mk}^{(+)}, \dot{\vec{H}}_{mk}^{(+)} \end{array} \right\}$, можно показать, что:

$$\int_{S_{\perp}} \left\{ \left[\begin{array}{c} \dot{\vec{E}}_{ml}^{(\pm)}, \dot{\vec{H}}_{mk}^{(\pm)} \\ \dot{\vec{E}}_{mk}^{(\pm)}, \dot{\vec{H}}_{ml}^{(\pm)} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \dot{\vec{E}}_{mk}^{(\pm)}, \dot{\vec{H}}_{ml}^{(\pm)} \\ \dot{\vec{E}}_{ml}^{(\pm)}, \dot{\vec{H}}_{mk}^{(\pm)} \end{array} \right] \right\} \bar{z}^0 ds = 0 , \quad (5.90)$$

$$\int_{S_{\perp}} \left\{ - \left[\begin{array}{c} \dot{\vec{E}}_{ml}^{(-)}, \dot{\vec{H}}_{mk}^{(+)} \\ \dot{\vec{E}}_{mk}^{(+)}, \dot{\vec{H}}_{ml}^{(-)} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \dot{\vec{E}}_{mk}^{(+)}, \dot{\vec{H}}_{ml}^{(-)} \\ \dot{\vec{E}}_{ml}^{(-)}, \dot{\vec{H}}_{mk}^{(+)} \end{array} \right] \right\} \bar{z}^0 ds = \begin{cases} 0, \text{ при } l \neq k \\ N_k, \text{ при } l = k \end{cases} . \quad (5.91)$$

Соотношения (5.90), (5.91) называются соотношениями ортогональности собственных волн в волноводе.

Из соотношений ортогональности следует, что в левой части соотношения (5.89) не равен нулю только один член в первой сумме с номером $l = k$. Отсюда находим, что:

$$C_k^{(-)} = \frac{1}{N_k} Q_k^{(+)} . \quad (5.92)$$

Полагая в (5.86) в качестве поля $\dot{\vec{E}}_{m2}, \dot{\vec{H}}_{m2}$ собственную волну отрицательного направления ($\dot{\vec{E}}_{m2} = \dot{\vec{E}}_{mk}^{(-)}, \dot{\vec{H}}_{m2} = \dot{\vec{H}}_{mk}^{(-)}$) и используя

ортогональность собственных волн (5.90), (5.91), получим следующее выражение для коэффициентов разложения $C_k^{(+)}$:

$$C_k^{(+)} = \frac{1}{N_k} Q_k^{(-)}, \quad (5.93)$$

где
$$Q_k^{(-)} = \int_V (\dot{j}_m^{cm} \dot{E}_{mk}^{(-)} - \dot{j}_m^{Mcm} \dot{H}_{mk}^{(-)}) dv. \quad (5.94)$$

Формулы (5.92), (5.93), совместно с формулами (5.88), (5.94), (5.91), (5.84), (5.85) дают решение задачи возбуждения волновода сторонними электрическими и магнитными токами.

5.6. Анализ решения

Рассмотрим возбуждение волновода элементарным электрическим излучателем с моментом \vec{P}^{cm} , расположенным в точке: $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 5.6).

Используя (5.88), (5.92), (5.93), (5.94), можно получить следующее выражение для коэффициентов разложения:

$$C_l^{(\pm)} = \frac{1}{N_l} \int_{V' \rightarrow (x_0, y_0, z_0)} \dot{j}_m^{cm}(\vec{r}') \dot{E}_{ml}^{(\mp)}(\vec{r}') dv' = \frac{1}{N_l} \dot{P}_m^{cm} \dot{E}_{ml}^{(\mp)}(\vec{r}_0), \quad (5.95)$$

где N_l - норма собственных волн, определяемая выражением (5.91).

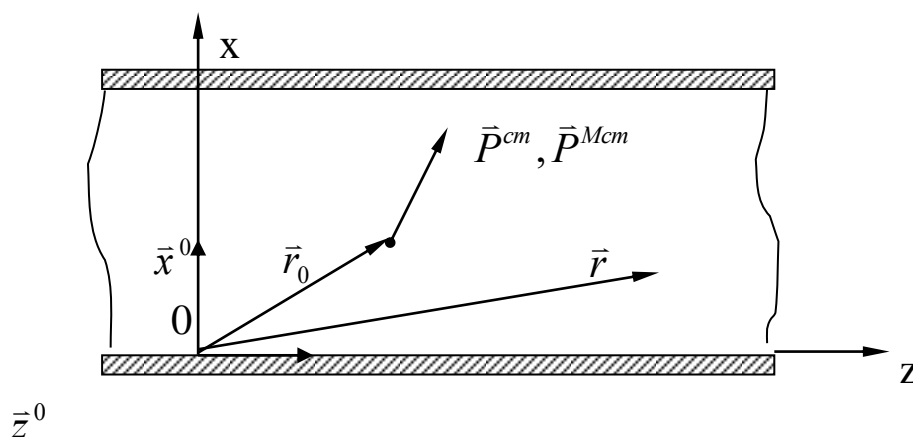


Рис.5.6 . Возбуждение волновода элементарными излучателями

Из анализа выражения (5.95) следует, что при расположении элементарного электрического излучателя в пучности электрического поля волны с номером l параллельно силовым линиям электрического поля этой волны ($\vec{P}^{cm} \parallel \vec{E}_l(x_0, y_0, z_0)$) амплитудный коэффициент $C_l^{(\pm)}$ будет максимальным. Если же излучатель поместить в узел электрического поля или перпендикулярно силовым линиям электрического поля ($\vec{P}^{cm} \perp \vec{E}_l(x_0, y_0, z_0)$), то собственная волна с номером l не возбуждается.

При возбуждении волновода элементарным магнитным излучателем с моментом \vec{P}^{Mcm} , расположенным в точке $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, амплитудный коэффициент $C_l^{(\pm)}$ собственной волны с номером l равен:

$$C_l^{(\pm)} = -\frac{1}{N_l} \dot{\vec{P}}_m^{Mcm} \dot{\vec{H}}_{ml}^{(\mp)}(\vec{r}_0). \quad (5.96)$$

Из (5.96) следует, что коэффициент $C_l^{(\pm)}$ имеет максимальное значение, если излучатель расположен в пучности магнитного поля волны и момент излучателя параллелен силовым линиям магнитного поля ($\vec{P}^{Mcm} \parallel \vec{H}_l^{(\mp)}(x_0, y_0, z_0)$).

Если же излучатель поместить в узел магнитного поля или момент излучателя перпендикулярен силовым линиям магнитного поля ($\vec{P}^{Mcm} \perp \vec{H}_l^{(\mp)}(x_0, y_0, z_0)$), то рассматриваемая волна не возбуждается.

Таким образом, можно сформулировать общие принципы, которыми следует руководствоваться при проектировании возбуждающих устройств, в качестве которых могут использоваться штырь, петля или щель в оболочке волновода. При этом штырь (короткий отрезок тонкого провода) рассматривается как элементарный электрический излучатель с моментом $\dot{\vec{P}}_m^{cm} = \dot{I}_m^{cm} \vec{l}$, где l - длина штыря.

Петля и щель рассматриваются как элементарные магнитные излучатели с моментом \vec{P}^{Mcm} . При этом для петли:

$$\dot{\vec{P}}_m^{Mcm} = i \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \dot{I}_m^{cm} k \vec{S},$$

где $\vec{S} = \vec{v}^0 S$, \vec{v}^0 - нормаль к площадке S , ограниченной контуром петли; для узкой щели:

$$\dot{\vec{P}}_m^{Mcm} = \dot{U}_m^{cm} \vec{l}, \text{ где } \dot{U}_m^{cm} - \text{напряжение в щели, } l - \text{длина щели.}$$

При возбуждении волновода петлей ее нужно помещать в пучность магнитного поля возбуждаемой волны, перпендикулярно силовым линиям магнитного поля.

При возбуждении волновода щелью ее нужно прорезать в пучности магнитного поля вдоль силовых линий магнитного поля.

Отметим, что на достаточно больших расстояниях от излучателя (практически, при $|\vec{r} - \vec{r}_0| > \frac{\lambda}{2}$) в разложениях (5.84), (5.85) нужно учитывать только распространяющиеся собственные волны, а в случае одномодового режима, который, как правило, и используется, только одну основную волну.

Структура поля основной волны прямоугольного волновода, определяемой выражениями (5.58), показана на рис. 5.7.

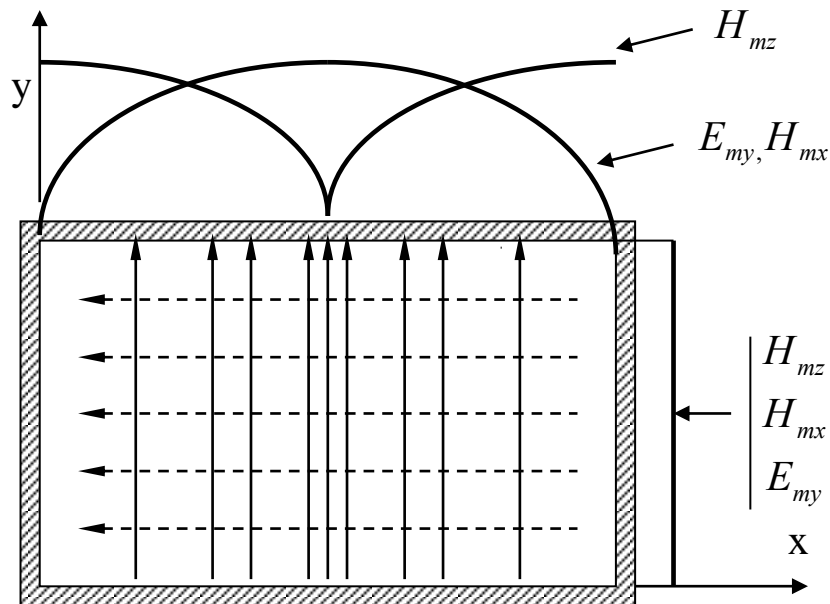


Рис. 5.7. Структура поля волны H_{10} в поперечном сечении прямоугольного волновода

На рис. 5.7. показаны силовые линии электрического поля (сплошные линии) и проекции силовых линий магнитного поля (штриховые линии) на

плоскость поперечного сечения, а также представлены графики распределения амплитуд составляющих поля вдоль осей X и Y .

Для получения максимальной амплитуды поля при возбуждении волны H_{10} штырь должен располагаться в середине широкой стенки волновода, параллельно оси Y . При возбуждении петлей ее надо располагать в середине широкой стенки таким образом, чтобы плоскость петли была перпендикулярна оси X , или у узкой стенки перпендикулярно оси Z .

При возбуждении волны H_{10} щелью в широкой стенке ее нужно прорезать в середине вдоль оси X (поперечная щель), или в узкой стенке вдоль оси Z (продольная щель).

Отметим, что продольная щель, прорезанная в середине широкой стенки, волну H_{10} не возбуждает, и этот факт используется при измерении поля в волноводе: измерительный зонд вводится в полость волновода через узкую продольную щель в середине широкой стенки волновода.

Не возбуждается волна H_{10} также поперечной щелью (вдоль оси Y), прорезанной в узкой стенке волновода.

5.7. Затухание электромагнитных волн в волноводах

В идеальном волноводе собственные волны положительного направления представляются в виде (5.28). При этом постоянные распространения Γ_i принимают: либо положительные значения (распространяющиеся собственные волны), либо чисто мнимые значения (затухающие, или запердельные собственные волны). Амплитуды распространяющихся волн не зависят от Z и остаются постоянными вдоль волновода. Амплитуды запердельных волн затухают по экспоненте вдоль оси Z . Однако затухание запердельных волн в идеальном волноводе не связано с потерями энергии.

Как было отмечено выше, энергия может переноситься только распространяющимися волнами.

В идеальном волноводе энергия, переносимая соответствующей распространяющейся волной через любое поперечное сечение волновода $Z = \text{const}$, остается постоянной.

В неидеальном волноводе происходит поглощение энергии в несовершенном диэлектрике ($\sigma_\delta \neq 0$), заполняющем полость волновода, и в проводящей металлической оболочке волновода ($\sigma_m \neq \infty$).

Рассмотрим вначале собственные волны волновода с неидеальным диэлектриком ($\sigma_\delta \neq 0$), но с идеально проводящей оболочкой ($\sigma_m = \infty$). В этом случае собственные волны определяются выражениями для собственных волн идеального волновода (5.21), (5.22), в которых нужно электрическую проницаемость диэлектрика ε_a заменить на комплексную электрическую

проницаемость $\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a (1 - itg\delta_\delta)$. При этом волновое число k становится комплексной величиной \dot{k} и представляется в виде:

$$\dot{k} = k\sqrt{1 - itg\delta_\delta}, \quad (5.97)$$

причем $tg\delta_\delta = \frac{\sigma_\delta}{\omega\varepsilon_a} \ll 1$.

Собственные волны положительного направления в этом случае можно представить в виде (5.28), где функции поперечных координат

$\dot{E}_{ml}^{(+)}(x, y), \dot{H}_{ml}^{(+)}(x, y)$ такие же, как и для идеального волновода, а постоянные распространения определяются из выражения (5.26), в котором нужно сделать замены : $k \rightarrow \dot{k}; \Gamma_l \rightarrow \dot{\Gamma}_l$, то есть

$$\dot{\Gamma}_l = \sqrt{\dot{k}^2 - \chi_l^2}. \quad (5.98)$$

Подставляя (5.97) в (5.98), получим:

$$\dot{\Gamma}_l = \Gamma_l \sqrt{1 - i \frac{k^2 tg\delta_\delta}{k^2 - \chi_l^2}} \approx \Gamma_l \left(1 - i \frac{1}{2} tg\delta_\delta \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kpl}} \right)^2} \right), \quad (5.99)$$

где Γ_l и λ_{kpl} - постоянная распространения и критическая длина волны собственной волны с номером l идеального волновода.

Для запердельных собственных волн ($\lambda > \lambda_{kpl}$) можно положить: $\dot{\Gamma}_l \approx \Gamma_l$, а для распространяющихся собственных волн ($\lambda < \lambda_{kpl}$):

$$\dot{\Gamma}_l = \Gamma'_l - i\Gamma''_l, \quad \Gamma''_l \ll \Gamma'_l,$$

где $\Gamma'_l \approx \Gamma_l$,

$$\Gamma''_l \approx \Gamma_l \frac{\operatorname{tg} \delta_\partial}{2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kpl}} \right)^2} = \frac{\sigma_\partial \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kpl}} \right)^2}}, \quad (5.100)$$

Γ'_l - коэффициент фазы, Γ''_l - коэффициент затухания.

Таким образом, учет потерь энергии в волноводе сводится к нахождению коэффициента затухания Γ''_l .

При малых потерях ($\Gamma''_l \ll \Gamma'_l$) независимо от того, где происходит поглощение энергии (в диэлектрике, заполняющем волновод, или в металлической оболочке волновода), для нахождения Γ''_l используется энергетический метод определения коэффициента затухания.

Применим уравнение энергетического баланса к области ΔV (рис.5.8) для распространяющейся собственной волны положительного направления с номером l .

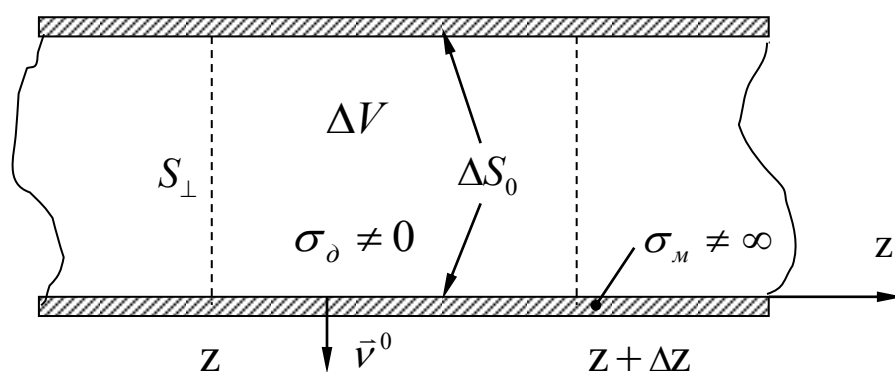


Рис.5.8. Продольное сечение неидеального волновода

$$\bar{P}(z + \Delta z) - \bar{P}(z) = -\Delta \bar{P}_n, \quad (5.101)$$

где $\Delta \bar{P}_n > 0$ - средняя мощность потерь в области ΔV , которую можно представить в виде суммы:

$$\Delta \bar{P}_n = \Delta \bar{P}_{nd} + \Delta \bar{P}_{nm}, \quad (5.102)$$

где $\Delta \bar{P}_{nd}$ - средняя мощность потерь в диэлектрике на участке Δz ; $\Delta \bar{P}_{nm}$ - средняя мощность потерь в металлической оболочке волновода ΔS_0 на участке Δz .

Разделим обе части уравнения (5.101) на Δz и рассмотрим их пределы при $\Delta z \rightarrow 0$. В результате получим следующее соотношение:

$$\frac{d\bar{P}}{dz} = -\bar{p}'_n, \quad (5.103)$$

где $\bar{p}'_n = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}_n}{\Delta z}$ - погонная мощность потерь, (5.104)

\bar{P} - средняя мощность, переносимая собственной волной через поперечное сечение волновода:

$$\bar{P} = \int_{S_\perp} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}_{ml}, \dot{\vec{H}}_{ml}^* \right] \right) \vec{z}^0 ds = e^{-2\Gamma_l'' z} \int_{S_\perp} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}_{ml}, \dot{\vec{H}}_{ml}^* \right] \right) \vec{z}^0 ds = \bar{P}_0 e^{-2\Gamma_l'' z}, \quad (5.105)$$

где \bar{P}_0 - средняя мощность, переносимая волной через поперечное сечение $z=0$.

Подставляя (5.105) в (5.103), получим:

$$-2\Gamma_l'' \bar{P}(z) = -\bar{p}'_n,$$

откуда:

$$\Gamma_l'' = \frac{1}{2} \frac{\bar{p}'_n}{\bar{P}}. \quad (5.106)$$

При малых потерях ($\Gamma_l'' \ll \Gamma_l'$) выражение для \bar{P} представим в виде:

$$\bar{P} = \frac{1}{2W_l} \int_{S_\perp} \dot{\vec{E}}_{ml\perp} \dot{\vec{E}}_{ml\perp}^* ds = \frac{1}{2} W_l \int_{S_\perp} \dot{\vec{H}}_{ml\perp} \dot{\vec{H}}_{ml\perp}^* ds, \quad (5.107)$$

где

$$W_l = \begin{cases} \frac{\Gamma_l^\vartheta}{\omega \varepsilon_a} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kpl}} \right)^2} - \text{для } E - \text{волн} \\ \frac{\omega \mu_a}{\Gamma_l^M} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kpl}} \right)^2}} - \text{для } H - \text{волн} \end{cases}$$

При этом напряженности поля в (5.107) определяются для идеального волновода при использовании формул (5.21), (5.22).

Используя (5.104), (5.102), вычислим погонную мощность потерь в диэлектрике:

$$\begin{aligned} \bar{P}'_{n\partial} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}_{n\partial}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta z} \int_{\Delta V} \sigma_\partial \dot{\vec{E}}_{ml} \dot{\vec{E}}_{ml}^* dv = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta z} \int_{S_\perp} \int_{z'=z}^{z+\Delta z} \sigma_\partial \dot{\vec{E}}_{ml} \dot{\vec{E}}_{ml}^* dz' ds = \frac{\sigma_\partial}{2} \int_{S_\perp} \dot{\vec{E}}_{ml} \dot{\vec{E}}_{ml}^* ds. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Используя (5.106)-(5.108), получим следующее выражение для коэффициента затухания $\Gamma_{l\partial}''$, обусловленного потерями в диэлектрике:

$$\Gamma_{l\partial}'' = \frac{1}{2} W_l \sigma_\partial \frac{\int_{S_\perp} \dot{\vec{E}}_{ml} \dot{\vec{E}}_{ml}^* ds}{\int_{S_\perp} \dot{\vec{E}}_{ml\perp} \dot{\vec{E}}_{ml\perp}^* ds}. \quad (5.109)$$

Для Н-волн: $\dot{\vec{E}}_{ml} = \dot{\vec{E}}_{ml\perp}$ и из (5.109) получим следующее выражение для Γ''_{l0} :

$$\Gamma''_{l0} = \frac{\sigma_{\partial} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kpl}} \right)^2}}, \text{ которое совпадает с выражением (5.100), полученным}$$

ранее другим способом.

Можно показать, что и для Е- волн выражение (5.109) приводится к виду (5.100).

Используя (5.104), (5.102), вычислим погонную мощность потерь в металлической оболочке волновода ΔS_0 :

$$\begin{aligned} \bar{p}'_{nm} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}_{nm}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_{\Delta S_0} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}_{ml}, \dot{\vec{H}}_{ml}^* \right] \right) \bar{v}^0 ds = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_{L_{\perp}} \int_{z'=z}^{z+\Delta z} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \left[\bar{v}^0, \dot{\vec{E}}_{ml\tau} \right] \dot{\vec{H}}_{ml\tau}^* \right) dz' dl = \frac{1}{2} \int_{L_{\perp}} \operatorname{Re} \left(\left[\bar{v}^0, \dot{\vec{E}}_{ml\tau} \right] \dot{\vec{H}}_{ml\tau}^* \right) dl, \end{aligned} \quad (5.110)$$

где L_{\perp} - контур поперечного сечения S_{\perp} волновода.

Используя граничное условие Леонтовича (4.38), представим выражение для \bar{p}'_{nm} в виде:

$$\bar{p}'_{nm} = \frac{1}{2} R_m \int_{L_{\perp}} \dot{\vec{H}}_{ml\tau} \dot{\vec{H}}_{ml\tau}^* dl, \quad (5.111)$$

где $R_m = \operatorname{Re} \dot{W}_m = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2 \sigma_m}} = \frac{1}{\sigma_m \Delta^0},$

$$\Delta^0 = \sqrt{\frac{2}{\sigma_m \omega \mu_0}} \text{ - толщина скин-слоя.}$$

Используя (5.106), (5.107), (5.111), получим выражение для коэффициента затухания Γ''_{lm} , обусловленного потерями в металлической оболочке волновода:

$$\Gamma_{lm}'' = \frac{1}{2} \frac{R_m}{W_l} \frac{\int_{L_\perp} \dot{\vec{H}}_{ml\tau} \dot{\vec{H}}_{ml\tau}^* dl}{\int_{S_\perp} \dot{\vec{H}}_{ml\perp} \dot{\vec{H}}_{ml\perp}^* ds} . \quad (5.112)$$

Полный коэффициент затухания Γ_l'' определяют суммой:

$$\Gamma_l'' = \Gamma_{l0}'' + \Gamma_{lm}'' .$$

Заметим, что в формуле (5.112) при вычислении напряженности магнитного поля используются выражения (5.21), (5.22), полученные для идеального волновода.

ГЛАВА 6. ВОЗБУЖДЕНИЕ ОБЪЁМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

6.1. Постановка задачи

Объемным резонатором называется область V , ограниченная поверхностью S_0 металлической оболочки резонатора V_m с удельной проводимостью σ_m (рис. 6.1).

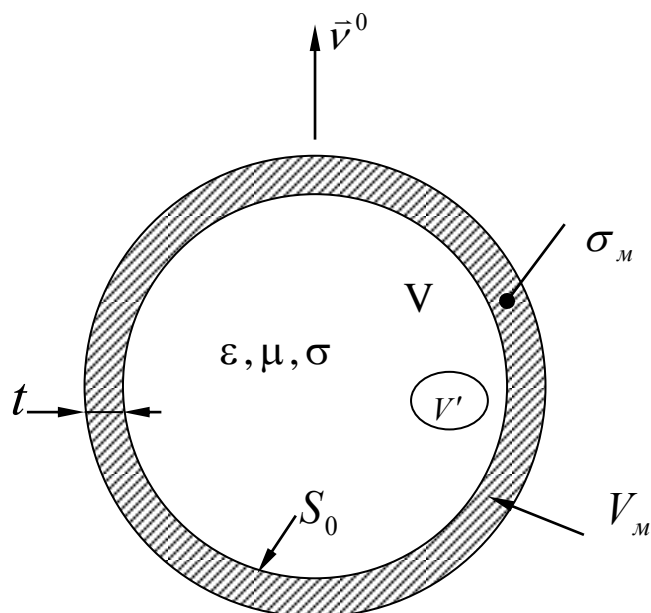


Рис. 6.1. Объемный резонатор

Полость резонатора V может быть заполнена диэлектриком с параметрами: $\varepsilon, \mu, \sigma_\partial$.

Если удельная проводимость диэлектрика $\sigma_\partial = 0$, а удельная проводимость оболочки $\sigma_m = \infty$, то такой резонатор называют идеальным резонатором. В идеальном резонаторе нет потерь энергии. Поле в идеально проводящей оболочке резонатора V_m равно нулю, и поэтому поле в резонаторе не зависит от толщины оболочки t .

Задача возбуждения резонатора с идеально проводящей оболочкой ставится следующим образом. В некоторой области V' (рис. 6.1.) заданы электрические и магнитные сторонние токи с плотностью: \vec{j}_m^{cm} и \vec{j}_m^{Mcm} . Требуется найти электромагнитное поле в области V , ограниченной поверхностью S_0 , удовлетворяющее системе уравнений электродинамики (3.26):

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{\dot{H}}_m &= i\omega \dot{\varepsilon}_a \vec{\dot{E}}_m + \vec{j}_m^{cm} \\ \text{rot} \vec{\dot{E}}_m &= -i\omega \mu_a \vec{\dot{H}}_m - \vec{j}_m^{Mcm} \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a (1 - itg\delta_\partial)$, $tg\delta_\partial = \frac{\sigma_\partial}{\omega \varepsilon_a}$,

и граничному условию: $\vec{\dot{E}}_{m\tau} \Big|_{S_0} = 0$. (6.2)

Граничная задача (6.1), (6.2) является внутренней задачей электродинамики и имеет единственное решение при сколь угодно малых значениях удельной проводимости диэлектрика ($\sigma_\partial \neq 0$).

Решение задачи (6.1), (6.2) можно получить в виде разложения по полной системе собственных, или свободных полей идеального резонатора.

Собственные (свободные) поля идеального резонатора являются решениями однородной системы уравнений электродинамики (системы (6.1),

при $\vec{j}_m^{cm} = 0, \vec{j}_m^{Mcm} = 0$) при $\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a$, удовлетворяющие граничному условию (6.2).

6.2. Собственные поля волноводного резонатора

Волноводным резонатором называется отрезок волновода длиной L , ограниченный с обоих концов ($z=0, z=L$) металлическими пластинами (рис. 6.2.).

Собственные поля идеального волноводного резонатора $(\dot{\vec{E}}_{mc}, \dot{\vec{H}}_{mc})$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \text{rot} \dot{\vec{H}}_{mc} &= i\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_{mc} \\ \text{rot} \dot{\vec{E}}_{mc} &= -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_{mc} \end{aligned} \quad (6.3)$$

и граничным условиям:

$$\text{а) } \dot{\vec{E}}_{mc\tau} \Big|_{S_B} = 0, \text{ б) } \dot{\vec{E}}_{mc\tau} \Big|_{z=0} = 0, \text{ в) } \dot{\vec{E}}_{mc\tau} \Big|_{z=L} = 0. \quad (6.4)$$

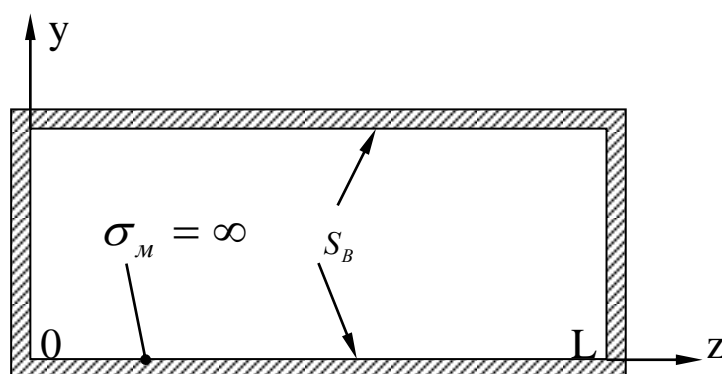


Рис. 6.2. Продольное сечение резонатора

Задача (6.3), (6.4), как и для полого волновода, имеет два типа решений:

- 1) решение электрического типа $(\dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}}, \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}})$, у которого $\dot{E}_{mz} \neq 0$, $\dot{H}_{mz} = 0$;
- 2) решение магнитного типа $(\dot{\vec{E}}_m^M, \dot{\vec{H}}_m^M)$, у которого $\dot{H}_{mz} \neq 0$, $\dot{E}_{mz} = 0$.

Решение электрического типа представляется в виде (5.4), решение магнитного типа – в виде (5.5). Собственные поля, которые представляются в виде (5.4), называются Е- полями. Собственные поля, которые представляются в виде (5.5), называются Н- полями.

Е- поля выражаются через функцию $\dot{U}_m^{\mathcal{E}}$ по формулам (5.9); Н- поля выражаются через функцию \dot{U}_m^M по формулам (5.12). Функции $\dot{U}_m^{\mathcal{E},M}$ удовлетворяют однородным волновым уравнениям (5.10), (5.13).

Так же, как и для полого волновода, решение однородного волнового уравнения представляется в виде (5.14):

$$\dot{U}_m^{\mathcal{E},M} = T^{\mathcal{E},M}(x, y) Z^{\mathcal{E},M}(z). \quad (6.5)$$

Функция $Z^{\mathcal{E},M}(z)$ удовлетворяет уравнению (5.19):

$$\frac{d^2 Z^{\mathcal{E},M}}{dz^2} + (\Gamma^{\mathcal{E},M})^2 Z^{\mathcal{E},M} = 0 \quad (6.6)$$

и краевым условиям:

$$\left. \frac{d\dot{Z}_m^{\mathcal{E}}}{dz} \right|_{z=0} = 0; \quad \left. \frac{d\dot{Z}_m^{\mathcal{E}}}{dz} \right|_{z=L} = 0, \quad (6.7)$$

$$\dot{Z}_m^M \Big|_{z=0} = 0; \quad \dot{Z}_m^M \Big|_{z=L} = 0. \quad (6.8)$$

При выполнении условий (6.7), (6.8) выполняются также граничные условия (6.4 б), (6.4 в).

Функция $T^{\mathcal{E},M}(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (5.23):

$$\Delta T_{\perp}^{\mathcal{E},M} + (\chi^{\mathcal{E},M})^2 T^{\mathcal{E},M} = 0 \quad (6.9)$$

и краевым условиям (5.24), (5.25), обеспечивает выполнение граничного условия (6.4 а).

Постоянные $(\Gamma^{\mathcal{E},M})^2$ и $(\chi^{\mathcal{E},M})^2$ связаны между собой уравнением связи (5.18):

$$\left(\Gamma^{\vartheta, M}\right)^2 = k^2 - \left(\chi^{\vartheta, M}\right)^2. \quad (6.10)$$

Решение уравнения (6.6), удовлетворяющее краевым условиям (6.7), (6.8), представляется в виде:

$$Z^{\vartheta} = \cos \Gamma^{\vartheta} z, \quad (6.11)$$

где $\Gamma^{\vartheta} = \frac{\pi}{L} p, \quad p = 0, 1, 2, \dots;$ (6.12)

$$Z^M = \sin \Gamma^M z, \quad (6.13)$$

где $\Gamma^M = \frac{\pi}{L} p, \quad p = 1, 2, \dots.$ (6.14)

Из (6.10), (6.12), (6.14) следует, что собственные поля резонатора могут существовать только на определенных частотах:

$$\omega = \omega_c = \omega^{\vartheta, M} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\chi^{\vartheta, M}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L} p\right)^2}, \quad (6.15)$$

которые называются собственными, или резонансными частотами резонатора.

Собственное поле, имеющее минимальную собственную частоту, называется основным полем. Остальные собственные поля называются высшими полями.

Таким образом, собственные поля идеального волноводного резонатора определяются выражениями (5.9), (5.12), в которых $\omega = \omega^{\vartheta, M}$ и

$$\dot{U}_m^{\vartheta} = T^{\vartheta}(x, y) \cos\left(\frac{\pi}{L} p z\right), \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.16)$$

$$\dot{U}_m^M = T^M(x, y) \sin\left(\frac{\pi}{L} p z\right), \quad p = 1, 2, 3, \dots, \quad (6.17)$$

где функция $T^{\vartheta, M}(x, y)$ - функция поперечных координат для соответствующего волновода.

Используя выражения (5.9), (5.12), (5.80), (5.74), (5.76), (6.16), (6.17) и формулы для вычисления градиента, дивергенции и ротора в цилиндрических координатах (r, α, z) , приведем выражения для собственных полей цилиндрического резонатора (рис. 6.3.).

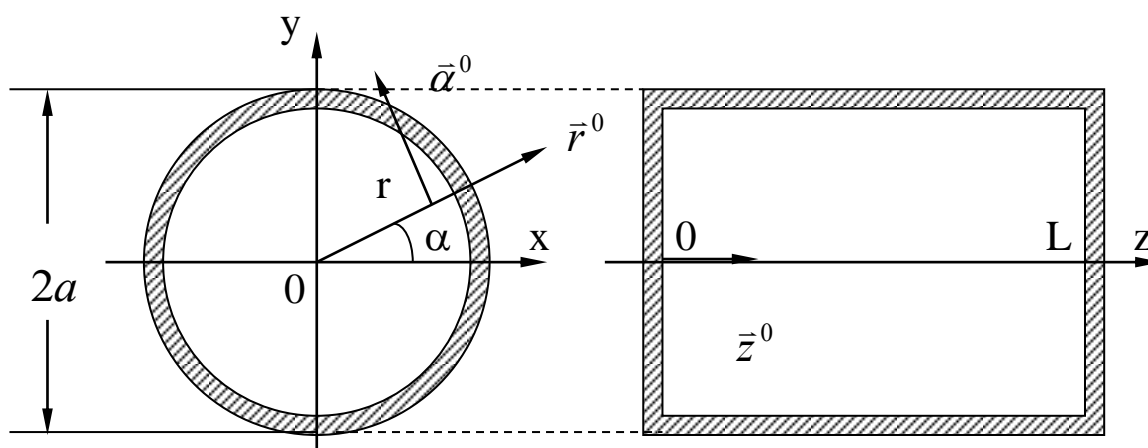


Рис. 6.3. Поперечное и продольное сечения цилиндрического резонатора

E-поля ($E_z \neq 0; H_z = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m^{\vartheta} &= \vec{r}^0 \frac{\partial^2 \dot{U}_m^{\vartheta}}{\partial r \partial z} + \vec{\alpha}^0 \frac{\partial^2 \dot{U}_m^{\vartheta}}{r \partial \alpha \partial z} + \vec{z}^0 (\chi^{\vartheta})^2 \dot{U}_m^{\vartheta}, \\ \dot{\vec{H}}_m^{\vartheta} &= i\omega^{\vartheta} \varepsilon_a \left(\vec{r}^0 \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_m^{\vartheta}}{\partial \alpha} - \vec{\alpha}^0 \frac{\partial \dot{U}_m^{\vartheta}}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (6.18)$$

где
$$\dot{U}_m^{\vartheta} = C^{\vartheta} J_n(\chi^{\vartheta} r) \begin{cases} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{cases} \cos\left(\frac{\pi}{L} pz\right), \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.19)$$

$$\omega^{\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{(\chi^{\vartheta})^2 + \left(\frac{\pi}{L} p\right)^2},$$

$$\chi^{\vartheta} = \chi_{nm}^{\vartheta} = \frac{B_{nm}}{a}, \quad B_{nm} - \text{корни функции Бесселя } (J_n(B_{nm}) = 0).$$

Е-поля в цилиндрическом резонаторе обозначаются E_{nmp} .

Н-поля ($H_z \neq 0; E_z = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{H}_m^M &= \bar{r}^0 \frac{\partial^2 \dot{U}_m^M}{\partial r \partial z} + \bar{\alpha}^0 \frac{\partial^2 \dot{U}_m^M}{r \partial \alpha \partial z} + \bar{z}^0 (\chi^M)^2 \dot{U}_m^M, \\ \dot{E}_m^M &= -i\omega^M \mu_a \left(\bar{r}^0 \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_m^M}{\partial \alpha} - \bar{\alpha}^0 \frac{\partial \dot{U}_m^M}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\text{где} \quad \dot{U}_m^M = C^M J_n(\chi^M r) \begin{cases} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{cases} \sin\left(\frac{\pi}{L} pz\right), \quad p = 1, 2, 3, \dots, \quad (6.21)$$

$$\omega^M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{(\chi^M)^2 + \left(\frac{\pi}{L} p\right)^2},$$

$$\chi^M = \chi_{nm}^M = \frac{A_{nm}}{a}, \quad A_{nm} - \text{корни производной функции Бесселя } (J'_n(A_{nm}) = 0).$$

Н-поля в цилиндрическом резонаторе обозначаются H_{nmp} .

Число n для Е и Н полей определяет зависимость собственных полей от угла α и равно числу полуволновых вариаций поля вдоль координаты α при изменении α от 0 до π .

Число m определяет зависимость собственных полей от радиальной координаты r .

Число p определяет зависимость собственных полей от продольной координаты z и равно числу полуволновых вариаций поля по длине резонатора.

Зависимость составляющих собственных полей от α определяется функциями $\cos n\alpha$ или $\sin n\alpha$.

Зависимость от r определяется функцией Бесселя $J_n(\chi^{\varnothing, M} r)$ или ее производной $J'_n(\chi^{\varnothing, M} r)$. Зависимость от z определяется функциями $\cos\left(\frac{\pi}{L}pz\right)$ или $\sin\left(\frac{\pi}{L}pz\right)$.

Основным собственным полем в цилиндрическом резонаторе является либо поле H_{111} (для длинного резонатора, $L > 2,03a$), либо поле E_{010} (для короткого резонатора, $L < 2,03a$).

6.3. Решение задачи возбуждения волноводного резонатора

Рассмотрим возбуждение волноводного резонатора электрическими и магнитными сторонними токами, распределенными в области V' ($0 < z'_1 < z' < z'_2 < L$) с плотностью \dot{J}_m^{cm} и \dot{J}_m^{Mcm} , соответственно.

Представим электромагнитное поле вне области V' в виде суммы первичного поля $(\dot{E}_m^{\Pi}, \dot{H}_m^{\Pi})$ и вторичного поля $(\dot{E}_m^{BT}, \dot{H}_m^{BT})$:

$$\dot{E}_m = \dot{E}_m^{\Pi} + \dot{E}_m^{BT}, \quad \dot{H}_m = \dot{H}_m^{\Pi} + \dot{H}_m^{BT}, \quad (6.22)$$

где первичное поле – это поле, возбужденное сторонними токами в бесконечном волноводе, определяемое выражениями (5.84), (5.85).

Вторичное поле представим в виде разложений по собственным волнам волновода положительного и отрицательного направлений:

$$\begin{aligned} \dot{E}_m^{BT} &= \sum_{l=1}^{\infty} \left(a_l^{(+)} \dot{E}_{ml}^{(+)} e^{-i\Gamma_l z} + a_l^{(-)} \dot{E}_{ml}^{(-)} e^{i\Gamma_l z} \right), \\ \dot{H}_m^{BT} &= \sum_{l=1}^{\infty} \left(a_l^{(+)} \dot{H}_{ml}^{(+)} e^{-i\Gamma_l z} + a_l^{(-)} \dot{H}_{ml}^{(-)} e^{i\Gamma_l z} \right). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Коэффициенты разложения $a_l^{(\pm)}$ можно найти, используя граничные условия на торцевых идеально проводящих стенках резонатора:

$$\text{а) } \dot{\vec{E}}_{m\perp} \Big|_{z=0} = 0, \quad \text{б) } \dot{\vec{E}}_{m\perp} \Big|_{z=L} = 0, \quad (6.24)$$

где $\dot{\vec{E}}_{m\perp}$ - поперечная составляющая напряженности полного поля.

Граничные условия (6.24) будут выполнены, если этим условиям удовлетворяет каждый член бесконечного ряда для суммарного поля.

Собственные волны можно пронормировать таким образом, чтобы:

$$\text{а) } \dot{\vec{E}}_{ml\perp}^{(-)} = \dot{\vec{E}}_{ml\perp}^{(+)}, \quad \text{б) } \dot{\vec{E}}_{mlz}^{(-)} = -\dot{\vec{E}}_{mlz}^{(+)} . \quad (6.25)$$

Используя разложения (5.84), (5.85), (6.23), граничные условия (6.24) и условие нормировки (6.25а), получим следующую систему линейных уравнений относительно коэффициентов разложения $a_l^{(\pm)}$:

$$\left. \begin{aligned} C_l^{(-)} + a_l^{(+)} + a_l^{(-)} &= 0 \\ C_l^{(+)} e^{-i\Gamma_l L} + a_l^{(+)} e^{-i\Gamma_l L} + a_l^{(-)} e^{i\Gamma_l L} &= 0 \end{aligned} \right\} . \quad (6.26)$$

Решая систему (6.26), получим следующие выражения для $a_l^{(\pm)}$:

$$\begin{aligned} a_l^{(+)} &= \frac{C_l^{(-)} e^{i\Gamma_l L} - C_l^{(+)} e^{-i\Gamma_l L}}{-i2 \sin \Gamma_l L}, \\ a_l^{(-)} &= -(a_l^{(+)} + C_l^{(-)}). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Постоянная распространения Γ_l связана с поперечным волновым числом χ_l и волновым числом k уравнением связи (5.26):

$$\Gamma_l = \sqrt{k^2 - \chi_l^2}, \quad (6.28)$$

где $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$.

6.4. Анализ решения

Из выражения (6.27) видно, что при

$$\sin \Gamma_l L = 0, \quad \Gamma_l = \frac{\pi}{L} p, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.29)$$

коэффициенты разложения $a_l^{(\pm)} \rightarrow \infty$.

Подставляя (6.29) в (6.28), получим уравнение относительно волнового числа k , при котором $\sin \Gamma_l L = 0$:

$$k = \sqrt{\chi_l^2 + \left(\frac{\pi}{L} p\right)^2} = k_c = \varpi_c \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}.$$

Отсюда частота

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\chi_l^2 + \left(\frac{\pi}{L} p\right)^2} \quad (6.30)$$

является собственной частотой резонатора.

Таким образом, при $\omega \rightarrow \omega_c$ амплитуда соответствующего собственного поля идеального резонатора стремится к бесконечности. Поэтому при частоте возбуждения ω , близкой к собственной частоте ω_c , при расчете поля в резонаторе по формулам (6.22) в разложениях можно оставить лишь один член представляющий соответствующее собственное поле.

Следовательно, при $\omega \approx \omega_c$ структура возбуждаемого сторонними токами поля совпадает со структурой соответствующего собственного поля.

Отметим, что при $\omega = \omega_c$ задача возбуждения идеального резонатора имеет бесконечное множество решений, так как к полученному решению можно прибавить любую линейную комбинацию собственных полей резонатора. Однако, при наличии сколь угодно малых потерь ($\sigma_d \neq 0$) задача возбуждения имеет единственное решение, так как собственные частоты неидеального резонатора имеют комплексные значения, а частота возбуждения имеет всегда действительное значение.

6.5. Поглощение энергии в резонаторе. Добротность

Собственные частоты резонатора при $\sigma_\delta \neq 0$ определяются выражением (6.30), в котором диэлектрическую проницаемость ε_a нужно заменить на комплексную диэлектрическую проницаемость $\dot{\varepsilon}_a$:

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a (1 - itg\delta_\delta). \quad (6.31)$$

При этом

$$\dot{\omega}_c = \omega'_c + i\omega''_c = \frac{\omega_c}{\sqrt{1 - itg\delta_\delta}} \bigg|_{tg\delta_\delta \ll 1} \approx \omega_c \left(1 + i \frac{tg\delta_\delta}{2} \right). \quad (6.32)$$

$$\text{Отсюда:} \quad \omega'_c \approx \omega_c, \quad \omega''_c \approx \omega_c \frac{tg\delta_\delta}{2}. \quad (6.33)$$

Заметим, что при комплексных собственных частотах собственные поля резонатора затухают с течением времени по экспоненциальному закону:

$$\vec{E}_c = \text{Re} \left(\dot{\vec{E}}_{mc} e^{i\omega_c t} \right) = e^{-\omega''_c t} \text{Re} \left(\dot{\vec{E}}_{mc} e^{i\omega'_c t} \right), \quad (6.34)$$

где $\dot{\vec{E}}_{mc}$ - комплексная амплитуда напряженности электрического поля соответствующего собственного поля.

При малых потерях, как следует из (6.33), $\omega''_c \ll \omega_c$, а $\dot{\vec{E}}_{mc} \approx \dot{\vec{E}}_{mc}^{ud}$, где $\dot{\vec{E}}_{mc}^{ud}$ - комплексная амплитуда собственного поля идеального резонатора.

Таким образом, при малых потерях собственное поле в резонаторе представляется в виде:

$$\vec{E}_c \approx e^{-\omega''_c t} \vec{E}_c^{ud}, \quad \vec{H}_c \approx e^{-\omega''_c t} \vec{H}_c^{ud}. \quad (6.35)$$

При возбуждении резонатора сторонними токами на частотах, близких к собственным ($\omega \approx \omega_c$), поле в резонаторе можно представить в виде:

$$\dot{\vec{E}}_m = \frac{\dot{A}_m}{\sin \Gamma_l L} \dot{\vec{E}}_{mc}^{ud}, \quad \dot{\vec{H}}_m = \frac{\dot{B}_m}{\sin \Gamma_l L} \dot{\vec{H}}_{mc}^{ud}, \quad (6.36)$$

где \dot{A}_m, \dot{B}_m - константы, величина которых зависит от коэффициентов $C_l^{(\pm)}$, определяемых выражениями (5.92), (5.93), (5.88), (5.94). Отсюда следует вывод, что при возбуждении заданного собственного поля в резонаторе элементарным электрическим или элементарным магнитным излучателем используются те же принципы, что и при возбуждении волноводов.

Можно показать, что при $\omega \approx \omega_c$:

$$\Gamma_l L \sin \Gamma_l L \approx C(\omega^2 - \dot{\omega}_c^2), \quad (6.37)$$

где C - константа, $\dot{\omega}_c \approx \omega_c + i\omega_c''$.

Частотная характеристика резонатора в окрестности собственной частоты идеального резонатора ω_c , представленная на рис.6.4., определяется выражением:

$$\frac{E_m}{E_{m \max}} = \frac{\omega_c''}{\sqrt{(\omega - \omega_c)^2 + (\omega_c'')^2}}. \quad (6.38)$$

Важными характеристиками резонатора являются полоса пропускания $2\Delta\omega$ (рис. 6.4.) и добротность Q , связанные между собой соотношением:

$$Q = \frac{\omega_c}{2\Delta\omega} = \frac{\omega_c}{2\omega_c''}. \quad (6.39)$$

Таким образом, добротность резонатора с малыми потерями определяется через собственную частоту идеального резонатора ω_c и мнимую часть комплексной собственной частоты ω_c'' .

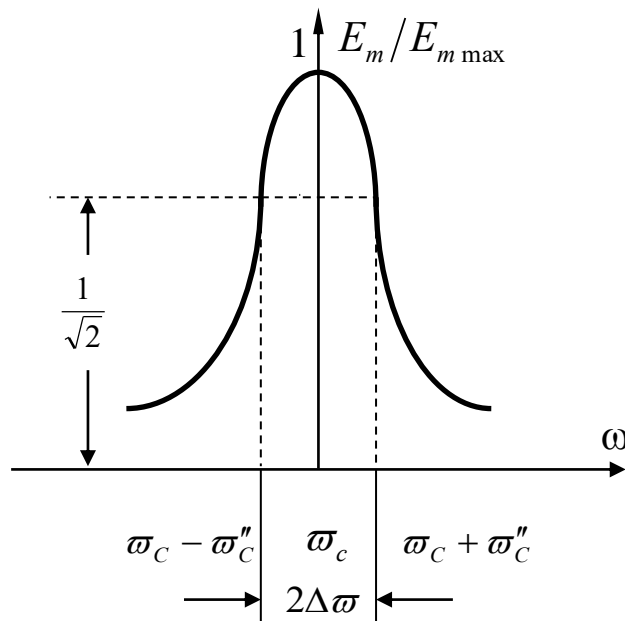


Рис. 6.4. Частотная характеристика резонатора

Используя (6.33), (6.39), получим следующее выражение для добротности резонатора с идеально проводящей оболочкой и несовершенным диэлектриком ($\sigma_\delta \neq 0$):

$$Q_\delta = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta_\delta} . \quad (6.40)$$

В общем случае, с учетом потерь в металлической оболочке резонатора, при вычислении добротности по формуле (6.39), используется энергетический метод определения мнимой части комплексной собственной частоты ω_c'' .

Используя (6.35), представим выражение для полной энергии W возбужденного в резонаторе электромагнитного поля при $\omega \approx \omega_c$ в виде:

$$W = W_{u\delta} e^{-2\omega_c'' t} , \quad (6.41)$$

где $W_{u\delta} = \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon_a (\bar{E}_c^{u\delta})^2 + \frac{1}{2} \mu_a (\bar{H}_c^{u\delta})^2 \right) dv$ - энергия собственного поля идеального резонатора, V - полость резонатора (рис. 6.1.).

При этом

$$\frac{dW_{u\delta}}{dt} = 0 , \quad (6.42)$$

т.е. $W_{уд} = const$.

С учетом потерь уравнение энергетического баланса записывается в виде:

$$\frac{dW}{dt} = -P_n, \quad (6.43)$$

где P_n - суммарная мощность потерь в диэлектрике $P_{нд}$ и в проводящей металлической оболочке резонатора P_{nm} :

$$P_n = P_{nm} + P_{нд}. \quad (6.44)$$

Проинтегрируем обе части уравнения (6.43) по времени t от 0 до

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}: \quad \int_0^{T_c} \frac{dW}{dt} dt = - \int_0^{T_c} P_n dt, \quad \text{где } T_c - \text{период колебания.}$$

Отсюда

$$W(T_c) - W(0) = -\bar{P}_n T_c, \quad (6.45)$$

где $\bar{P}_n = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} P_n(t) dt$ - средняя мощность потерь.

Подставляя (6.41) в (6.45), получим следующее уравнение:

$$W_{уд} \left(e^{-2\omega_c'' T_c} - 1 \right) = -\bar{P}_n T_c. \quad (6.46)$$

Так как $\omega_c'' \ll \omega_c$, то $e^{-2\omega_c'' T_c} \approx 1 - 2\omega_c'' T_c$, и из уравнения (6.46) определяем ω_c'' :

$$\omega_c = \frac{\bar{P}_n}{2W_{уд}} \quad (6.47)$$

Так как $W_{уд}$ не зависит от времени t , то $W_{уд} = \bar{W}_{уд}$,
где $\bar{W}_{уд} = \bar{W}_{уд}^{\mathcal{E}} + \bar{W}_{уд}^M$ - среднее значение энергии;

$$\bar{W}_{уд}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{4} \int_V \epsilon_a \dot{\vec{E}}_{mc} \dot{\vec{E}}_{mc}^* dv, \quad \bar{W}_{уд}^M = \frac{1}{4} \int_V \mu_a \dot{\vec{H}}_{mc} \dot{\vec{H}}_{mc}^* dv,$$

$\dot{\vec{E}}_{mc}, \dot{\vec{H}}_{mc}$ - собственные поля идеального резонатора.

Из теоремы Пойнтинга (1.30), следует, что $\overline{W}_{ud}^{\mathcal{Q}} = \overline{W}_{ud}^M$, поэтому выражение для \overline{W}_{ud} можно представить в виде:

$$\overline{W}_{ud} = 2\overline{W}_{ud}^{\mathcal{Q}} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_a \dot{\vec{E}}_{mc} \dot{\vec{E}}_{mc}^* dv, \quad (6.48)$$

или в виде:

$$\overline{W}_{ud} = 2\overline{W}_{ud}^M = \frac{1}{2} \int_V \mu_a \dot{\vec{H}}_{mc} \dot{\vec{H}}_{mc}^* dv. \quad (6.49)$$

Средняя мощность потерь в диэлектрике определяется следующим выражением:

$$\overline{P}_{nd} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_d \dot{\vec{E}}_{mc} \dot{\vec{E}}_{mc}^* dv. \quad (6.50)$$

Используя (6.47), (6.48), (6.50), получим выражение для ω_{cd}'' в виде :

$$\omega_{cd}'' = \frac{\overline{P}_{nd}}{2\overline{W}_{ud}} = \frac{1}{2} \omega_c tg\delta_d. \quad \text{Отсюда, в соответствии с (6.39),} \quad (6.39)$$

получим следующее выражение для добротности Q_d , которое совпадает с выражением (6.40), полученным ранее:

$$Q_d = \frac{\omega_c}{2\omega_{cd}''} = \frac{1}{tg\delta_d}.$$

Средняя мощность потерь в проводящей металлической оболочке резонатора определяется следующим выражением:

$$\overline{P}_{nm} = \int_{S_0} \text{Re} \left(\frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}_{mc}, \dot{\vec{H}}_{mc}^* \right] \right) \vec{v}^0 ds, \quad (6.51)$$

где S_0 - поверхность металлической оболочки резонатора,

\vec{v}^0 - внешняя относительно области V единичная нормаль к поверхности S_0 (рис. 6.1.).

Приведем выражение (6.51) к виду:

$$\bar{P}_{nm} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_0} [\vec{v}^0, \dot{\vec{E}}_{mc}] \dot{\vec{H}}_{mc}^* ds = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_0} [\vec{v}^0, \dot{\vec{E}}_{mc\tau}] \dot{\vec{H}}_{mc\tau}^* ds. \quad (6.52)$$

В случае идеально проводящей оболочки резонатора тангенциальная составляющая электрического поля $\dot{\vec{E}}_{mc\tau} = 0$ и, следовательно, $\bar{P}_{nm}^{u\partial} = 0$.

При $\sigma_m \neq \infty$ для определения тангенциальной составляющей напряженности электрического поля на металлической оболочке резонатора можно воспользоваться граничным условием Леонтовича (4.38). При этом выражение (6.52) для \bar{P}_{nm} приводится к виду:

$$\bar{P}_{nm} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{W}_m \int_{S_0} \dot{\vec{H}}_{mc\tau} \dot{\vec{H}}_{mc\tau}^* ds = \frac{1}{2\sigma_m \Delta^0} \int_{S_0} \dot{\vec{H}}_{mc\tau} \dot{\vec{H}}_{mc\tau}^* ds, \quad (6.53)$$

где $\Delta^0 = \sqrt{\frac{2}{\omega_c \sigma_m \mu_{am}}}$ - толщина скин-слоя.

Используя (6.47), (6.48), (6.53), получим следующее выражение для ω_{cm}'' :

$$\omega_{cm}'' = \frac{\bar{P}_{nm}}{2\bar{W}_{u\partial}} = \frac{1}{2\sigma_m \Delta^0} \frac{\int_{S_0} \dot{\vec{H}}_{mc\tau} \dot{\vec{H}}_{mc\tau}^* ds}{\int_V \mu_a \dot{\vec{H}}_{mc} \dot{\vec{H}}_{mc}^* dv}. \quad (6.54)$$

На частотах возбуждения ω близких к ω_c при вычислении напряженности магнитного поля в (6.54) используются выражения, полученные при $\sigma_m \rightarrow \infty$.

Подставляя (6.54) в (6.39), получим при $\mu_a = \mu_{am}$ следующее выражение для Q_m :

$$Q_m = \frac{\omega_c}{2\omega_{cm}''} = \frac{2}{\Delta^0} \frac{\int_V \dot{\vec{H}}_{mc} \dot{\vec{H}}_{mc}^* dv}{\int_{S_0} \dot{\vec{H}}_{mc\tau} \dot{\vec{H}}_{mc\tau}^* ds}. \quad (6.55)$$

При учете потерь и в диэлектрике, и в металлической оболочке резонатора мнимая часть комплексной собственной частоты определяется выражением

$$\omega_c'' = \frac{\overline{P}_{nd} + \overline{P}_{nm}}{2W_{ud}},$$

и полная добротность резонатора Q находится из следующего соотношения:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_m}. \quad (6.56)$$

Библиографический список

1. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988. – 440с.
2. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1978. – 608с.
3. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1989 г. – 544с.
4. Вольман В.И., Пименов Ю.В. Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1971. – 487с.
5. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцев А.Д. Техническая электродинамика. – М.: Радио и связь, 2000. – 536с.
6. Марков Г.Т., Петров Б. М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Сов. Радио, 1979. – 374с.
7. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. – М. – Л.: Энергия, 1967. – 376с.
8. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Горячая линия – Телеком, 2003. – 558с.
9. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1992. – 416с.
10. Нефёдов Е.И. Техническая электродинамика. – М.: Академия, 2008. – 416с.
11. Коваленко А.Н., Щербицкий А.Н. Электродинамика и распространение радиоволн. Часть 1. Основы теории электромагнитного поля. – М.: МИРЭА, 1999. – 71 с.

12. Коваленко А.Н., Щербицкий А.Н. Электродинамика и распространение радиоволн. Часть 2. Граничные задачи электродинамики. – М.: МИРЭА, 2001. – 71 с.
13. Коваленко А.Н., Щербицкий А.Н. Электродинамика и распространение радиоволн. Часть 3. Распространение радиоволн. – М.: МИРЭА, 2004. – 80с.
14. Никольский В.В., Математический аппарат электродинамики. – М.: МИРЭА, 1973. – 151с.
15. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1986. – 544с.
16. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М. – Л.: Изд. физ. – мат. лит., 1963. – 358с.
17. Градштейн И.С., Рыжик И. Н. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Изд. физ. – мат. лит., 1962. – 1100с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
ГЛАВА 1. Основные положения и уравнения электродинамики	4
1.1. Характеристики электромагнитного поля. Электрические заряды и токи	4
1.2. Уравнения Максвелла	6
1.3. Основные законы электромагнетизма, выражаемые уравнениями Максвелла	8
1.4. Уравнение непрерывности и закон сохранения заряда	9
1.5. Материальные уравнения и классификация сред	10
1.6. Полная система уравнений электродинамики	13
1.7. Граничные условия электродинамики	14
1.8. Теорема Пойнтинга	18
1.9. Уравнения электродинамики и теорема Пойнтинга для монохроматического электромагнитного поля	20
1.10. Теорема единственности для внутренних и внешних задач электродинамики	23
ГЛАВА 2. Возбуждение электромагнитных волн в свободном пространстве	26
2.1. Постановка задачи	26
2.2. Волновые уравнения электродинамики. Векторный потенциал	27
2.3. Векторный потенциал элемента электрического тока	28
2.4. Векторный потенциал линейного, поверхностного и объемного токов	31
2.5. Электромагнитное поле поверхностного тока, равномерно распределенного на бесконечной плоскости. Плоские однородные волны (ПОВ)	33
2.6. Основные характеристики ПОВ	37
2.7. ПОВ с линейной, круговой и эллиптической поляризацией векторов поля	41
2.8. Электромагнитное поле элементарного электрического излучателя. Основные характеристики	44
2.9. Электромагнитное поле в дальней зоне. Сферическая волна	47
2.10. Диаграмма направленности	48
2.11. Мощность и сопротивление излучения	51

ГЛАВА 3. Основные принципы, используемые в теории электромагнитного поля	52
3.1. Принцип суперпозиции	52
3.2. Электромагнитное поле элементарного рамочного излучателя	53
3.3. Принцип излучения на бесконечности	57
3.4. Принцип взаимности	59
3.5. Принцип двойственности	61
3.6. Электромагнитное поле элементарного магнитного излучателя	63
3.7. Электромагнитное поле элементарного щелевого излучателя	65
3.8. Принцип эквивалентности	67
3.9. Электромагнитное поле элемента Гюйгенса	70
3.10. Излучение участка фронта плоской однородной волны	73
ГЛАВА 4. Возбуждение плоской границы раздела сред плоской однородной волной	81
4.1. Постановка задачи	81
4.2. Решение задачи при нормальном падении	83
4.3. Решение задачи при наклонном падении	86
4.4. Анализ решения	89
ГЛАВА 5. Возбуждение электромагнитных волн в полых волноводах	94
5.1. Постановка задачи	94
5.2. Собственные волны полых волноводов	96
5.3. Собственные волны прямоугольного волновода	105
5.4. Собственные волны круглого волновода	112
5.5. Решение задачи возбуждения полых волноводов	118
5.6. Анализ решения	121
5.7. Затухание электромагнитных волн в волноводах	125
ГЛАВА 6. Возбуждение объемных резонаторов	131
6.1. Постановка задачи	131
6.2. Собственные поля волноводного резонатора	132
6.3. Решение задачи возбуждения волноводного резонатора	138
6.4. Анализ решения	139
6.5. Поглощение энергии в резонаторе. Добротность резонатора	140
Библиографический список	146

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Учебное пособие

Редактор А.Н. Коваленко
Литературный редактор Л.В. Омелянович

Подписано к печати Формат 60 х 84 1 / 16

Бумага офсетная . Печать офсетная . Усл. печ. л.

Усл. кр. — отт. Уч.-изд. л. Тираж 100 экз.

C 579

Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики (технический университет)

117454 Москва, просп. Вернадского, 78