МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ
РАДИОТЕХНИКИ. ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.Н. КОВАЛЕНКО А.Н. ЩЕРБИЦКИЙ

Э Л Е К Т Р О Д И Н А М И К А
И Р А С П Р О С Т Р А Н Е Н И Е Р А Д И О В О Л Н

Часть 3
РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Учебное пособие

МОСКВА 2004

ББК 22.313
К 56
УДК 537.874

Рецензенты: д.т.н., проф. В.В.Чебышев
к.т.н., доц. А.А.Фалунин

К 56 А.Н.Коваленко, А.Н. Щербицкий. Электродинамика и распространение радиоволн. Часть 3. Распространение радиоволн. Учебное пособие / Моск. гос. ин-т радиотехники, электроники и автоматики (технический университет).- М., 2003.- 84 с.

ISBN 5-7339-0187-х

Излагаются содержание, постановка и некоторые методы решения задач дифракции и рефракции электромагнитных волн. Рассматриваются основные факторы, влияющие на распространение радиоволн в природных условиях. Приводится классификация радиоволн по способам их распространения и по частоте, отмечаются основные особенности распространения радиоволн различных диапазонов.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения по специальностям 200700 - Радиотехника, 071500 - Радиофизика, 201600 - Радиоэлектронные системы.

Табл. 1. Ил. 40. Библиогр. – 9 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (технического университета).

$К\frac{1604050000-20}{1К8(03)-99}$ Без объявл. ББК 22.313

ISBN 5-7339-0187-х

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие представляет собой третью часть теоретического курса дисциплины “Электродинамика и распространение радиоволн” для специальностей 200700 - Радиотехника, 071500 – Радиофизика и электроника, 201600 - Радиоэлектронные системы и базируется на материале, изложенном в первой и второй частях пособия “Основы теории электромагнитного поля” и “Граничные задачи электродинамики” (издание МИРЭА, 1999 и 2001 г.г.)

В учебном пособии рассмотрены разделы рабочей программы “Дифракция и рефракция электромагнитных волн” и “Радиоволны в природных условиях”.

При написании учебного пособия были использованы материалы лекций, прочитанных авторами на факультете Радиотехнических систем и вечернем Радиотехническом факультете МИРЭА, а также некоторых источников, отраженных в библиографическом списке.

ЧАСТЬ 3. Распространение радиоволн

Глава 7. Дифракция и рефракция электромагнитных волн

7.1. Содержание, постановка и методы решения задач дифракции

Задача возбуждения электромагнитных волн сторонними источниками в свободном пространстве была рассмотрена в первой части курса [1]. Если в пространстве находятся какие-либо материальные объекты, то процесс распространения электромагнитных волн существенно отличается от рассмотренного ранее, и возникает задача о возбуждении этих объектов, т.е. задача отыскания вторичных полей как вне, так и внутри объектов – полей дифракции.

Рассмотрим основные понятия и определения, связанные с явлениями дифракции, а также некоторые методы решения дифракционных задач.

7.1.1. Поля дифракции

При возбуждении какого-либо материального объекта (а – диэлектрическое тело, б – проводящее тело, в – отверстие в проводящем экране, рис. 7.1.) некоторой падающей на него волной, поля которой ($\vec{E}^0, \vec{H}^0$) полагаются известными, возникают поля дифракции.

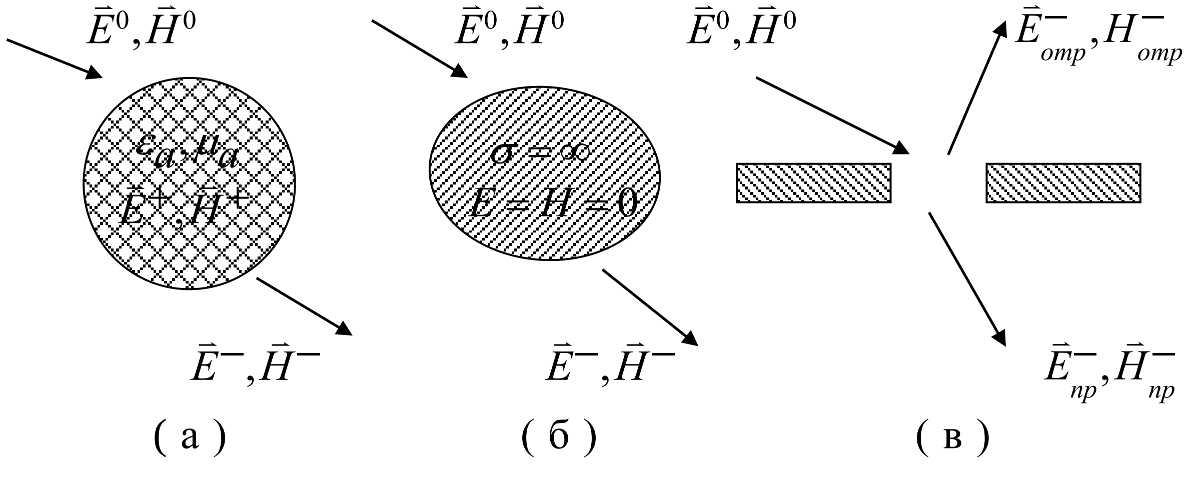


Рис.7.1. Дифракция на различных объектах

Поле внутри диэлектрического тела ($\vec{E}^+$, $\vec{H}^+$) называется внутренним полем дифракции. Вне объектов появляется внешнее поле дифракции ($\vec{E}^-$, $\vec{H}^-$), которое в случаях « а » и « б » можно назвать отраженными, а в случае « в » внешнее поле дифракции складывается из отраженного ($\vec{E}^-_{отр}$, $\vec{H}^-_{отр}$) (над экраном) и прошедшего ($\vec{E}^-_{пр}$, $\vec{H}^-_{пр}$) (под экраном) полей. В общем случае внешнее поле дифракции называется полем рассеяния.

Заметим, что к классу дифракционных задач можно отнести и задачу о возбуждении плоской границы раздела двух сред, подробно рассмотренную во второй части пособия [2].

Для нахождения внешнего и внутреннего полей дифракции необходимо решить соответствующую граничную задачу, т.е. найти решение однородной системы уравнений электродинамики [1], которое удовлетворяет граничным условиям :

на поверхности диэлектрического объекта

$$\left[\ \vec{v}^0, \left(\vec{E}^0 + \vec{E}^-\right)\ \right] = \left[\vec{v}^0, \vec{E}^+\right], \tag{7.1}$$

$$\left[\ \vec{v}^0, \left(\vec{H}^0 + \vec{H}^-\right)\ \right] = \left[\vec{v}^0, \vec{H}^+\right],$$

на поверхности идеально проводящего объекта

$$\left[\ \vec{v}^0, \left(\vec{E}^0 + \vec{E}^-\right)\ \right] = 0; \left[\ \vec{v}^0, \left(\vec{H}^0 + \vec{H}^-\right)\ \right] = \vec{\eta}\ . \tag{7.2}$$

Кроме того внешнее поле дифракции должно удовлетворять условию излучения на бесконечности [1].

7.1.2 Методы решения задач дифракции

При решении задач дифракции в большинстве случаев получить строгое решение, т.е. представить в явном виде формулами, в которые входят исходные данные задачи, не удается. Лишь в некоторых случаях (например, дифракция на шаре, бесконечном цилиндре), можно получить строгое решение задачи и поля представить рядами, в которых коэффициенты разложения определяются непосредственно из граничных условий на поверхности объекта.

Практически интересные для высокочастотной радиотехники, в том числе для радиолокации, дифракционные задачи связаны с объектами сложной геометрической формы.

Для решения таких задач существуют и развиваются универсальные приближенные численные методы с использованием интегральных уравнений электродинамики и проекционных методов .Библиография по этим вопросам частично приведена в [3]. На базе этих методов возможно построение алгоритмов и программ для решения сложных дифракционных задач с помощью ЭВМ (в том числе персональных компьютеров).

При отыскании приближенного решения дифракционной задачи обычно используется некоторый малый параметр, в качестве которого можно взять отношение характерного размера объекта a (например, его длины или периметра) к длине волны λ (или обратной величины λ/a).

При этом различают три области решения :

1. Квазистационарная область (длинноволновое приближение). При этом малый параметр задачи $a/\lambda << 1$ ($\lambda \to \infty$) и волновое число $\kappa = \dfrac{2\pi}{\lambda} \to 0$. Волновое уравнение Гельмгольца преобразуется в уравнение Лапласа, описывающее статические (стационарные) поля.

2. Резонансная область (параметр $a/\lambda \approx 1$) наиболее сложна для исследования. Для решения используются строгие методы (метод собственных функций, метод интегральных уравнений).

3. Квазиоптическая область (коротковолновое приближение). При этом малый параметр задачи $\lambda/a << 1$ ($\lambda \to 0$).

Чем меньше λ/a , тем более точные результаты в этой области дает геометрическая оптика. Однако, при этом фронт волны и поверхность объекта должны быть локально плоскими.

Квазиоптические методы решения подразделяются на две группы :

1. Асимптотические методы. Они основаны на исследовании точных решений при стремлении $\lambda \to 0$.
2. Эвристические (интуитивные) методы с привлечением некоторых физических идей. Сюда относятся :

А) Лучевые методы – геометрическая оптика и ее уточнения.

Б) Волновые методы – физическая оптика (приближение

Кирхгофа) и ее уточнения.

Рассмотрим применение некоторых методов решения к конкретным задачам дифракции.

7.2. Дифракция ПОВ на цилиндре (строгий метод решения)

В общем случае при падении ПОВ ($\vec{E}^0$, $\vec{H}^0$) на цилиндрический объект возникают внешнее ($\vec{E}^-$, $\vec{H}^-$) и внутреннее ($\vec{E}^+$, $\vec{H}^+$) поля дифракции, причем на всей поверхности объекта, включая торцы (если цилиндр конечный), должны выполнятся граничные условия (7.1), (7.2). Наиболее просто эти граничные условия записать для объекта в виде бесконечного однородного кругового цилиндра с параметрами ε_{a2} , μ_{a2}, находящегося в среде с параметрами ε_{a1}, μ_{a1} , поверхность которого совпадает в цилиндрической системе координат r, α, z с координатной поверхностью $r = a$ (рис.7.2.)

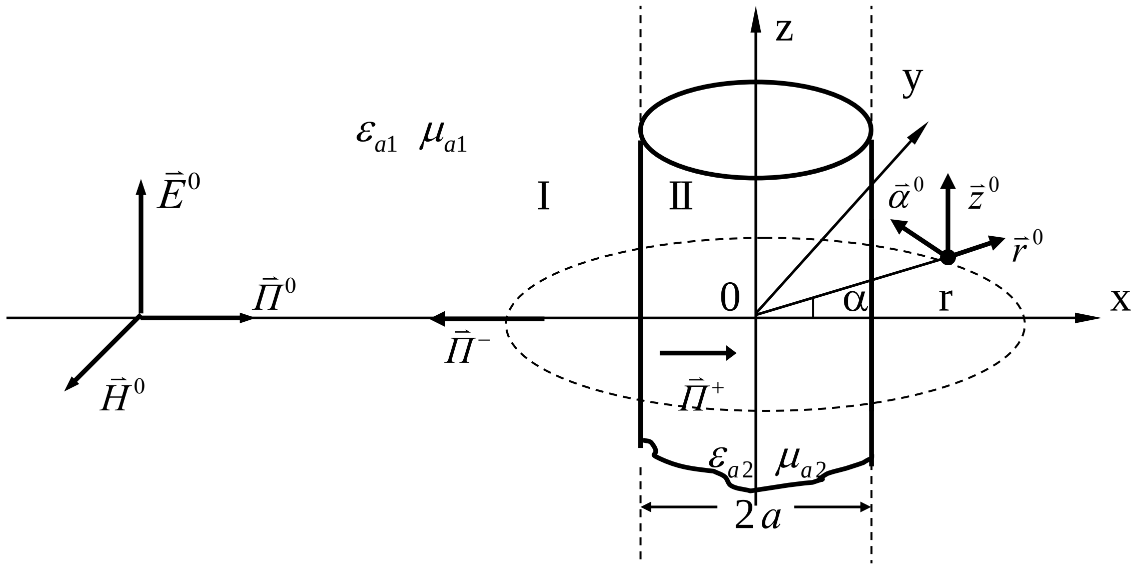


Рис. 7.2 Дифракция ПОВ на цилиндре

Комплексные амплитуды поля ПОВ, поляризованной вдоль оси цилиндра z и движущейся вдоль координаты x ,представляются в виде:

$$\dot{\vec{E}}_m^0 = \vec{z}^0 \dot{E}_0 e^{-ik_1 x}; \quad \dot{\vec{H}}_m^0 = -\vec{y}^0 \frac{\dot{E}_0}{W_1} e^{-ik_1 x}, \tag{7.3}$$

где $W_1 = \sqrt{\mu_{a1}/\varepsilon_{a1}}$ - волновое сопротивление пространства I.

Для удовлетворения граничным условиям на поверхности цилиндра внешние и внутренние поля дифракции должны быть однородными по оси z. Однородные волновые уравнения Гельмгольца для составляющих $\dot{E}_{mz}^{\pm}$ этих полей в цилиндрической системе координат имеет вид :

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}^{\pm}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{E}_{mz}^{\pm}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}^{\pm}}{\partial \alpha^2} + k_j^2 \dot{E}_{mz}^{\pm} = 0, \qquad (7.4)$$

где индекс $j = \begin{cases} 1, & r > a \\ 2, & r < a \end{cases}$.

Поля дифракции периодичны по координате $\alpha\left(0 \div 2\pi\right)$, поэтому их можно представить в виде рядов Фурье по системе функций $e^{in\alpha}$:

$$\dot{\vec{E}}_m^{-} = \vec{z}^{\,0} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n R^{-}\left(r\right) e^{in\alpha} \qquad (7.5)$$

$$\dot{\vec{E}}_m^{+} = \vec{z}^{\,0} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} b_n R^{+}\left(r\right) e^{in\alpha} \qquad (7.6)$$

где $R^{\pm}\left(r\right)$ - неизвестные функции распределения полей по координате r,

a_n, b_n - неизвестные амплитудные коэффициенты,

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Подставляя (7.5), (7.6) в (7.4), получаем уравнение Бесселя относительно функции $R^{\pm}\left(r\right)$:

$$\frac{d^2 R^{\pm}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR\pm}{dr} + \left(k_j^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R^{\pm} = 0 \qquad (7.7)$$

Его решением являются цилиндрические функции n -ого порядка :

$J_n\left(k_j r\right)$ -функция Бесселя; $N_n\left(k_j r\right)$ - функция Неймана.

Линейные комбинации этих функций также представляют решения уравнения Бесселя :

функция Ханкеля 1-го рода - $H_n^{(1)}\left(k_j r\right) = J_n\left(k_j r\right) + iN_n\left(k_j r\right)$, (7.8)

функция Ханкеля 2-го рода - $H_n^{(2)}\left(k_j r\right) = J_n\left(k_j r\right) - iN_n\left(k_j r\right)$. (7.9)

Внутреннее поле дифракции должно быть конечным, поэтому в его представлении (7.6) в качестве $R^{+}(r)$ нужно использовать конечные в начале координат функции Бесселя $J_n(k_2 r)$.

Внешнее поле дифракции (7.5) необходимо представлять через функцию Ханкеля 2-го рода $H_n^{(2)}(k_1 r)$, которая при $r \to \infty$ описывает расходящуюся волну, удовлетворяющую условию излучения на бесконечности [3].

Экспоненту $e^{-ik_1 x} = e^{-ik_1 r\cos\alpha}$, входящую в выражения (7.3) для поля падающей ПОВ, также можно представить в виде ряда Фурье по системе функций $e^{in\alpha}$:

$$e^{-ik_1 r\cos\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-i)^n J_n(k_1 r) e^{in\alpha} \quad , \tag{7.10}$$

где $(-i)^n J_n(k_1 r) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_1 r\cos\alpha} e^{-in\alpha} d\alpha$ - коэффициенты разложения Фурье.

При этом поле падающей ПОВ записывается в форме, аналогичной (7.5), (7.6):

$$\dot{\vec{E}}_m^0 = \vec{z}^0 \dot{E}_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-i)^n J_n(k_1 r) e^{in\alpha} \quad , \tag{7.11}$$

и его можно трактовать как бесконечную сумму так называемых цилиндрических гармоник, каждая из которых удовлетворяет однородному волновому уравнению Гельмгольца.

Неизвестные амплитудные коэффициенты гармоник внешнего и внутреннего полей дифракции a_n и b_n определяются из граничных условий (7.1), которые для электрического поля можно записать в виде:

$$\dot{E}_{mz}^0 + \dot{E}_{mz}^- = \dot{E}_{mz}^+ \quad \text{при } r = a \, , \tag{7.12}$$

откуда получаем :

$$\left(-i\right)^n \dot{E}_0 J_n(k_1a) + a_n H_n^{(2)}(k_1a) = b_n J_n(k_2a) \,. \qquad (7.13)$$

Из второго уравнения Максвелла $rot\dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu_j\dot{\vec{H}}_m$
в цилиндрической системе координат находим :

$$\dot{H}_{m\alpha} = -\frac{i}{W_j}\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial(k_j r)}, \qquad (7.14)$$

где $W_j = \sqrt{\mu_{a\,j}/\varepsilon_{a\,j}}$ - волновое сопротивление среды..

Граничное условие для магнитного поля можно записать в виде :

$$\dot{H}^0_{m\alpha} + \dot{H}^-_{m\alpha} = \dot{H}^+_{m\alpha} \quad \text{при} \quad r = a \,, \qquad (7.15)$$

откуда с учетом (7.14) получаем :

$$\frac{(-i)^n \dot{E}_0 J_n^{/}(k_1a) + a_n H_n^{(2)/}(k_1a)}{W_1} = \frac{b_n J_n^{/}(k_2a)}{W_2} \,, \qquad (7.16)$$

где штрих означает производную по полному аргументу.

Решая совместно (7.13) и (7.16), находим :

$$a_n = \left(-i\right)^n \dot{E}_0 \frac{W_1 J_n(k_1a) J_n^{/}(k_2a) - W_2 J_n^{/}(k_1a) J_n(k_2a)}{-W_1 H_n^{(2)}(k_1a) J_n^{/}(k_2a) + W_2 H_n^{(2)/}(k_1a) J_n(k_2a)}, \qquad (7.17)$$

$$b_n = \left(-i\right)^n \dot{E}_0 \frac{-W_2 [H_n^{(2)}(k_1a) J_n^{/}(k_1a) - H_n^{(2)/}(k_1a) J_n(k_1a)]}{-W_1 H_n^{(2)}(k_1a) J_n^{/}(k_2a) + W_2 H_n^{(2)/}(k_1a) J_n(k_2a)}. \qquad (7.18)$$

Подставляя (7.17), (7.18) в (7.5), (7.6), находим выражения для электрических полей дифракции, а с помощью второго уравнения Максвелла находим магнитные поля дифракции. Таким образом, строгое решение поставленной задачи получено.

В частном случае дифракции ПОВ на идеально проводящем цилиндре ($\sigma = \infty$), для которого $W_2 = 0$, из (7.18) следует, что $b_n = 0$, т.е. внутреннее поле дифракции отсутствует (электромагнитное поле в идеальный проводник не проникает).

Из (7.17) в этом случае получаем:

$$a_n = -\left(-i\right)^n \dot{E}_0 \frac{J_n(k_1 a)}{H_n^{(2)}(k_1 a)}, \tag{7.19}$$

при этом суммарное поле вне цилиндра на конечном расстоянии r определяется выражением:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_m^0 + \dot{\vec{E}}_m^- = \vec{z}^0 \dot{E}_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-i)^n [J_n(k_1 r) - \frac{J_n(k_1 a)}{H_n^{(2)}(k_1 a)} H_n^{(2)}(k_1 r)] e^{in\alpha} . \tag{7.20}$$

Суммарное магнитное поле определяется с помощью второго ура – внения Максвелла . Отметим, что при практических расчетах поля по формуле (7.20) для получения точности $\sim 1\,\%$ необходимо учитывать $\left(2k_1 a\right)$ членов ряда.

7.2.1. Поле элементарного электрического излучателя, располо женного вблизи цилиндра

В общем случае решение задачи чрезвычайно громоздко. Поэтому рассмотрим частный случай , когда элементарный электрический излучатель (ЭЭИ) с моментом $\dot{\vec{P}}_m^{cm} = \dot{I}_m^{cm} \vec{l}$ расположен вблизи идеально проводящего цилиндра в т. Q параллельно его оси, и требуется найти поле на большом расстоянии r от цилиндра (в дальней зоне ЭЭИ) в т. P (рис.7.3.).

Решение этой задачи можно получить автоматически, воспользовавшись результатами, приведенными выше в разделе 7.2, и принципом взаимности [1].

Действительно, можно полагать, что источником ПОВ с составляющими поля (7.3) является ЭЭИ с моментом $\dot{\vec{P}}_m^{cm} = \dot{I}_m^{cm} \vec{l}$, расположенный на очень большом расстоянии $r^{/}$ от оси цилиндра (рис. 7.4.) в т. $Q^{/}$.

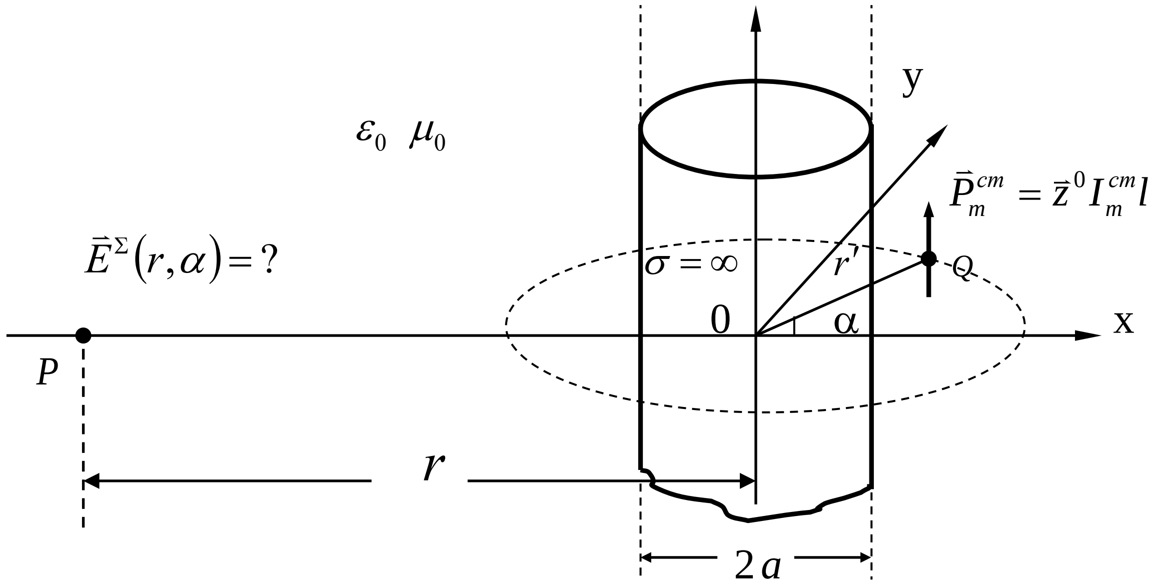


Рис. 7.3 Система “Э.Э.И. - цилиндр”

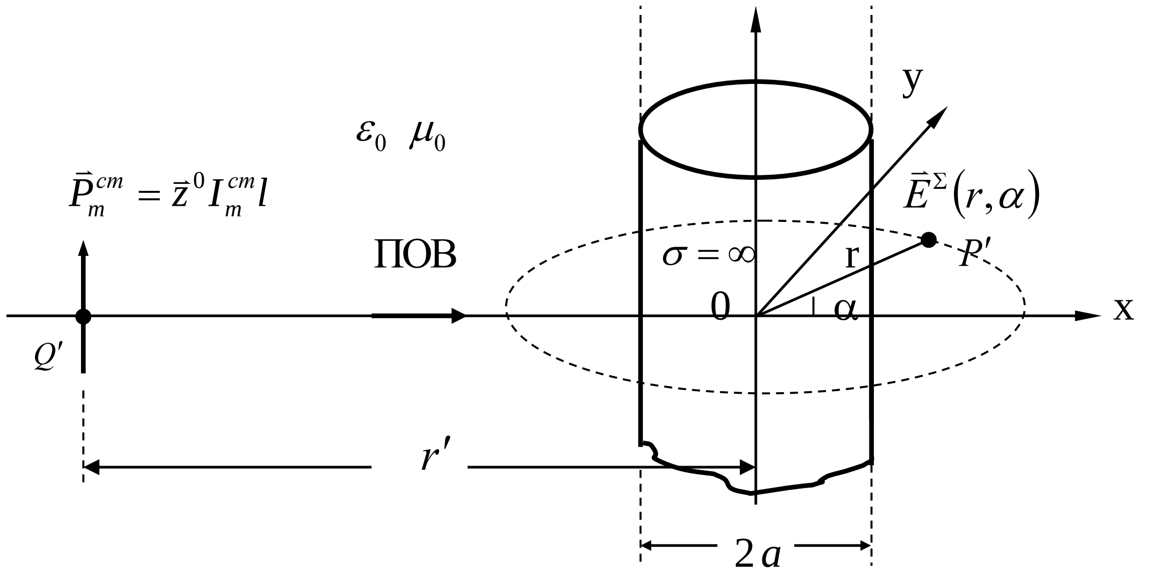


Рис. 7.4 Дифракция ПОВ на цилиндре

При этом комплексный амплитудный множитель $\dot{E}_0$ соответствует комплексной амплитуде поля ЭЭИ в дальней зоне при $\theta = 90^0$ [1]:

$$\dot{E}_0 = i\,\frac{\dot{I}_m^{cm} k_0 l}{4\pi} W_0\,\frac{e^{-ik_0 r'}}{r'}, \tag{7.21}$$

а поле $\dot{\vec{E}}_m^{\Sigma}(r,\alpha)$ в т. P' определяется выражением (7.20).

На основании принципа взаимности поле в т. P системы “ЭЭИ- цилиндр” (рис. 7.3.) определяется выражениями (7.21), (7.20) при замене $r \leftrightarrow r'$. В итоге получаем:

$$\dot{\vec{E}}_m^{\Sigma}(r,\alpha) = \vec{z}^{\,0} i \frac{\dot{I}_m^{cm} k_0 l}{4\pi} W_0 \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-i)^n \left[J_n(k_0 r') - \frac{J_n(k_0 a)}{H_n^{(2)}(k_0 a)} H_n^{(2)}(k_0 r') \right] e^{in\alpha}. \qquad (7.22)$$

На основании метода зеркальных изображений и из формулы (7.22) следует, что если ЭЭИ положить на поверхность цилиндра $(r' = a)$, то он излучать не будет: $\dot{\vec{E}}_m^{\Sigma}(r,\alpha) = 0$.

7.3. Метод физической оптики (приближение Кирхгофа)

Метод используется при решении задач дифракции на проводящих объектах ограниченного объема (или поперечного сечения), а также на отверстиях в проводящих экранах (рис. 7.5)

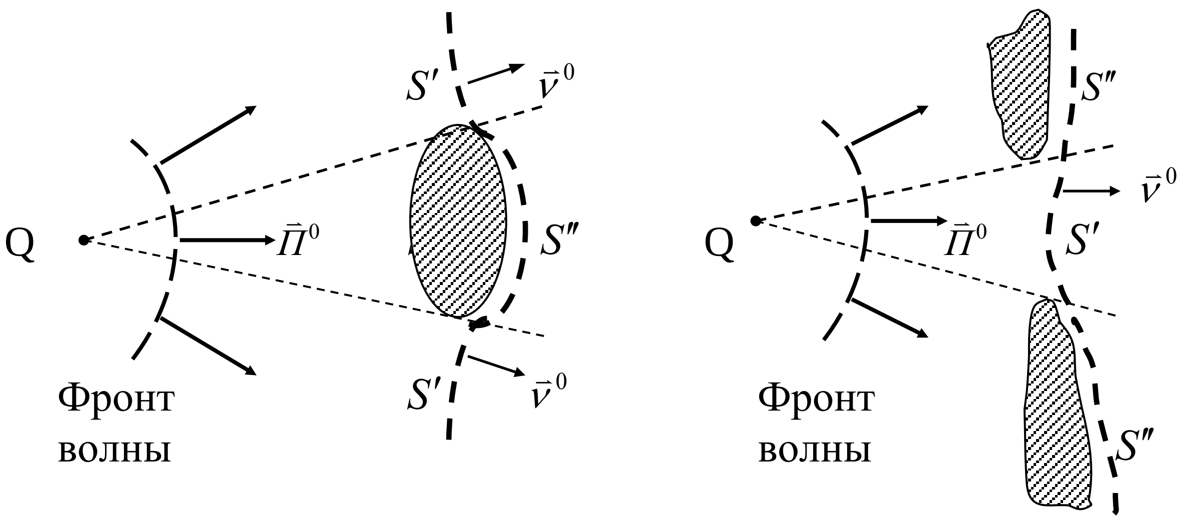


Рис. 7.5 Дифракция на проводящих объектах (приближение Кирхгофа)

Поверхность $S = S' + S''$ либо окружает источник, либо “сверху” и “снизу” от объекта уходит на ∞. При этом, в соответствии с методом геометрической оптики, $S^{/}$ является “освещенной”, а $S^{//}$ - “теневой” частями поверхности S.

Физический смысл метода состоит в предположении, что источниками поля вне (справа) поверхности S являются эквивалентные источники, расположенные на освещенной части $S^{/}$ и адекватные неискаженному (как в свободном пространстве) первичному полю падающей волны, а на теневой части $S^{//}$ они равны нулю.

Таким образом,

$$\dot{\vec{E}}_m^S = \begin{cases} \dot{\vec{E}}_m^0 & на \quad S' \\ 0 & на \quad S'' \end{cases}; \quad \dot{\vec{H}}_m^S = \begin{cases} \dot{\vec{H}}_m^0 & на \quad S' \\ 0 & на \quad S'' \end{cases}, \tag{7.23}$$

и, в соответствии с принципом эквивалентности [1],

$$\dot{\vec{\eta}}_m^{\,экв.э}\Big|_{S^/} = [\vec{\nu}^0\, \dot{\vec{H}}_m^0]\Big|_{S^/}\,; \dot{\vec{\eta}}_m^{\,экв.м}\Big|_{S^/} = -[\vec{\nu}^0\, \dot{\vec{E}}_m^0]\Big|_{S^/} \tag{7.24}$$

$$\dot{\vec{\eta}}_m^{\,экв.э}\Big|_{S''} = \dot{\vec{\eta}}_m^{\,экв.м}\Big|_{S''} = 0 \tag{7.25}$$

Далее решаются “электрическая” и “магнитная” задачи возбуждения источниками (7.24), и искомое поле определяется соотношениями :

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_m^э + \dot{\vec{E}}_m^м;\ \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{H}}_m^э + \dot{\vec{H}}_m^м$$

Следует отметить, что приближение Кирхгофа широко используется в теории антенн, излучающих из раскрыва (рупорные, зеркальные).

7.3.1. Дифракция ПОВ на отверстии в экране

Рассмотрим нормальное падение ПОВ из полупространства $z < 0$ на проводящий экран S с отверстием произвольной формы S_0 (рис.7.6.).

Падающая ПОВ имеет составляющие :

$$\dot{\vec{E}}_m^0 = \vec{x}^0 \dot{E}_0 e^{-ik_0 z}, \dot{\vec{H}}_m^0 = \vec{y}^0 \frac{\dot{E}_0}{W_0} e^{-ik_0 z}. \tag{7.26}$$

Ограничиваясь исследованием внешнего поля дифракции лишь в полупространстве $z > 0$ за экраном $(\vec{E}_{пр}^-, \vec{H}_{пр}^-)$, в приближении Кирхгофа считаем , что на теневой стороне экрана, обращенной в это полупространство, поля равны нулю $\left(\dot{\vec{E}}_m^S = 0, \quad \dot{\vec{H}}_m^S = 0\right)$, а в раскрыве отверстия S_0 равны неискаженному полю падающей ПОВ :

$$\dot{\vec{E}}_m^{S_0} = \dot{\vec{E}}_m^0 \Big|_{z=0} = \vec{x}^0\, \dot{E}_0\,; \quad \dot{\vec{H}}_m^{S_0} = \dot{\vec{H}}_m^0 \Big|_{z=0} = \vec{y}^0\, \frac{\dot{E}_0}{W_0}\,. \qquad (7.27)$$

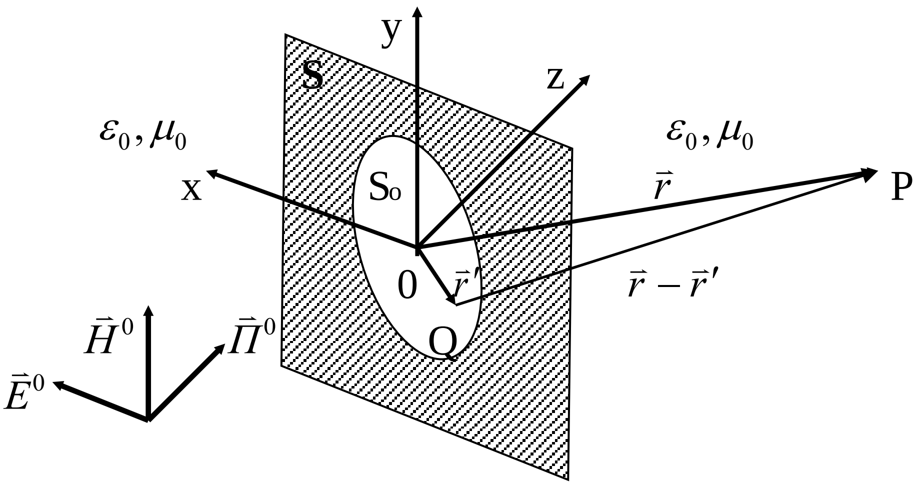


Рис. 7.6. Падение ПОВ на отверстие в экране

Можно считать, что эти поля (или соответствующие им эквивалентные поверхностные токи) в каждой точке $Q(x', y', 0)$ отверстия S_0 образуют источник излучения в пространство $z > 0$ в виде элемента Гюйгенса, и , таким образом, внешнее поле дифракции в произвольной точке наблюдения $P(x, y, z)$ определяются суммарным излучением всех элементов Гюйгенса, находящихся в раскрыве отверстия S_0.

В сферической системе координат r, θ, α электрическое поле каждого элемента Гюйгенса , занимающего элемент поверхности раскрыва отверстия dS', в дальней зоне ($|\vec{r} - \vec{r}'| >> \lambda$) определяется выражением [1]:

$$d\dot{\vec{E}}_m = i\,\frac{\vec{E}_0 k_0}{4\pi}(1+\cos\theta)(\vec{\theta}^0\cos\alpha - \vec{\alpha}^0\sin\alpha)\frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dS'\,. \qquad (7.28)$$

Так как на практике размеры отверстия много меньше расстояния до точек дальней зоны , то из всех этих точек отверстие S_0 видно практически под нулевым углом , а любой элемент Гюйгенса , находящийся в отверстии, дает одинаковую зависимость поля от координат θ и α . Поэтому при определении суммарного поля в точке наблюдения интегрированием выраже -

ния (7.28) по площади отверстия S_0 из-под знака интеграла можно вынести функции координат θ и α. В итоге получаем:

$$\dot{\vec{E}}^{-}_{m\,np} = \int_{S_0} d\dot{\vec{E}}_m = i\frac{\dot{E}_0 k_0}{4\pi}(1+\cos\theta)(\vec{\theta}^0\cos\alpha - \vec{\alpha}^0\sin\alpha)\Phi\,, \qquad (7.29)$$

где

$$\Phi = \int_{S_0} \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dS' \qquad (7.30)$$

Расстояние элемента Гюйгенса, находящегося в точке $Q(x', y', 0)$, до точки наблюдения $P(x, y, z)$ определяется выражением:

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2} = $$

$$= r\sqrt{1-\frac{2(xx'+yy')}{r^2}+\frac{(x')^2+(y')^2}{r^2}}\,, \qquad (7.31)$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ - расстояние от начала координат до точки наблюдения.

С учетом соотношений $r >> x'$, $r >> y'$, разлагая $|\vec{r}-\vec{r}'|$ в степенной ряд и оставляя в разложении первые три слагаемых, получаем: :

$$|\vec{r}-\vec{r}'| \approx r - \frac{xx'+yy'}{r} + \frac{(x')^2+(y')^2}{2r}\,. \qquad (7.32)$$

Если расстояние r настолько велико, что при вычислении Φ (7.30) слагаемое $\frac{(x')^2+(y')^2}{2r}$ в выражении (7.32) практически не влияет на фазу Φ и им можно пренебречь, то, как говорят, имеет место дифракция Фраунгофера.

При этом слагаемое $\frac{xx'+yy'}{r} << r$, и в знаменателе подынтегрального выражения (7.30), влияющем на амплитуду поля элемента Гюйгенса, можно положить $|\vec{r}-\vec{r}'| = r = const$ и вынести из-под знака интеграла. В показателе экспоненты такое допущение не корректно, так как фаза подынтегрального выражения может существенно меняться от точки к точке в раскрыве отверстия (особенно, когда размеры отверстия соизмеримы или больше длины волны λ).

С учетом сказанного выражение (7.30) принимает вид :

$$\Phi = \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \int\limits_{S_0} e^{ik_0 \frac{xx^/ + yy^/}{r}} dS^/ \quad . \tag{7.33а}$$

Рассмотрим прямоугольное отверстие в экране размером $a \times b$(рис.7.7.).

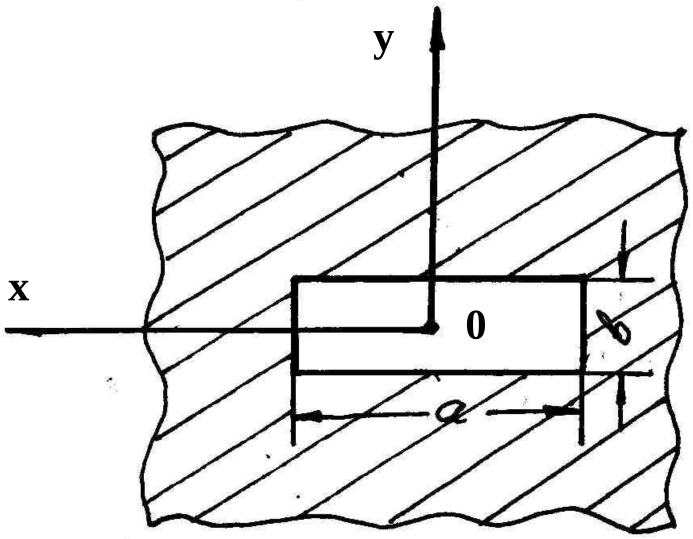


Рис. 7.7. Прямоугольное отверстие в экране

Используя формулу Эйлера $\sin\gamma = \dfrac{e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}}{2i}$, в результате интегрирования получаем :

$$\Phi = ab \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \frac{\sin U}{U} \frac{\sin V}{V}, \tag{7.33б}$$

где $$U = \frac{k_0 a}{2r} x, \quad V = \frac{k_0 b}{2r} y \,. \tag{7.34}$$

Переходя к сферическим координатам r, θ, α (рис. 7.8.) и используя соотношения

$$x = r\sin\theta\cos\alpha ; y = r\sin\theta\sin\alpha , \tag{7.35}$$

преобразуем (7.34) :

$$U = \frac{k_0 a}{2} \sin\theta\cos\alpha , \quad V = \frac{k_0 b}{2} \sin\theta\sin\alpha \,. \tag{7.36}$$

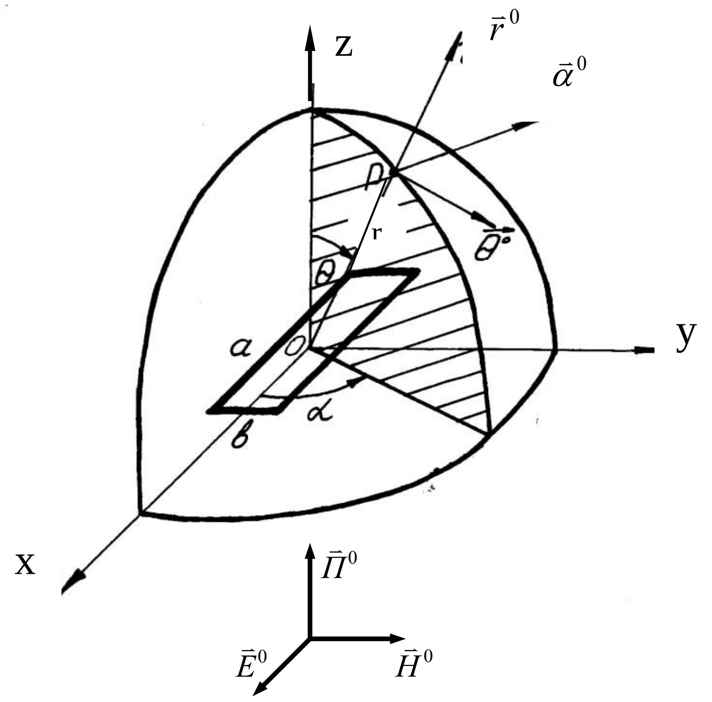


Рис. 7.8. Прямоугольное отверстие в сферической системе координат

При этом выражение для поля (7.29) принимает вид:

$$\dot{\vec{E}}^{-}_{mnp} = i\,\frac{\dot{E}_0 k_0 ab}{4\pi}\,\frac{e^{-ik_0 r}}{r}(1+\cos\theta)(\vec{\theta}^{\,0}\cos\alpha - \vec{\alpha}^{\,0}\sin\alpha)\,\frac{\sin U}{U}\,\frac{\sin V}{V}\,. \quad (7.37)$$

Полученное выражение показывает, что внешнее поле дифракции в дальней зоне представляет собой сферическую (локально плоскую) неоднородную волну.

Магнитное поле определяется известным соотношением [1]:

$$\dot{\vec{H}}^{-}_{mnp} = \frac{1}{W_0}\left[\vec{r}^{\,0}, \dot{\vec{E}}^{-}_{mnp}\right],$$

которое, с учетом (7.37) и $\left[\vec{r}^{\,0}(\vec{\theta}^{\,0}\cos\alpha - \vec{\alpha}^{\,0}\sin\alpha)\right] = \vec{\theta}^{\,0}\sin\alpha + \vec{\alpha}^{\,0}\cos\alpha$, принимает вид:

$$\dot{\vec{H}}^{-}_{mnp} = i\,\frac{\dot{E}_0 k_0 ab}{4\pi W_0}\,\frac{e^{-ik_0 r}}{r}(1+\cos\theta)(\vec{\theta}^{\,0}\sin\alpha + \vec{\alpha}^{\,0}\cos\alpha)\,\frac{\sin U}{U}\,\frac{\sin V}{V}\,. \quad (7.38)$$

7.3.2. Анализ поля дифракции Фраунгофера

Напомним, что в дальней зоне зависимость модуля напряженности поля какого-либо источника от направления в точку наблюдения, т.е. от углов θ и α, называется диаграммой направленности данного источника излучения. При исследовании диаграммы направленности обычно делается нормировка по максимальному значению поля.

Диаграмму направленности прямоугольного отверстия в экране удобно рассматривать в двух плоскостях :

1. при $\alpha = 0$ (E - плоскость) – для составляющей $E^-_{m\theta}$,
2. при $\alpha = 90^0$ (H - плоскость) – для составляющей $E^-_{m\alpha}$.

В первом случае легко показать, что

$$\frac{\sin V}{V}\Big|_{\alpha=0} = \frac{\sin(\frac{k_0 b}{2}\sin\theta\sin\alpha)}{\frac{k_0 b}{2}\sin\theta\sin\alpha}\Big|_{\alpha=0} = 1 \ ,$$

и нормированная диаграмма направленности с учетом, что $E^-_{m\theta\max} = E^-_{m\theta}\big|_{\theta=0}$, описывается выражением :

$$F^{\mathrm{E}}(\theta) = \frac{\left|E^-_{m\theta}\right|}{\left|E^-_{m\theta\max}\right|} = \frac{1+\cos\theta}{2}\left|\frac{\sin(\frac{k_0 a}{2}\sin\theta)}{\frac{k_0 a}{2}\sin\theta}\right| \qquad (7.39)$$

Аналогично во втором случае имеем: $\frac{\sin U}{U}\Big|_{\alpha=90^0} = 1$,

$E^-_{m\alpha\max} = E^-_{m\alpha}\big|_{\theta=0}$,

и нормированная диаграмма направленности описывается выражением :

$$F^{\mathrm{H}}(\theta) = \frac{\left|E^-_{m\alpha}\right|}{\left|E^-_{m\alpha\max}\right|} = \frac{1+\cos\theta}{2}\left|\frac{\sin(\frac{k_0 b}{2}\sin\theta)}{\frac{k_0 b}{2}\sin\theta}\right|. \qquad (7.40)$$

В формулах (7.39), (7.40) первый множитель представляет собой нормированную диаграмму направленности элемента Гюйгенса, а второй учитывает распределение элементов Гюйгенса в отверстии по координатам x и y, соответственно, и называется интерференционным множителем.

Диаграмма направленности имеет многолепестковую структуру с главным максимумом излучения в направлении $\theta = 0$.

В частном случае, когда размеры отверстия велики по сравнению с длиной волны $(a >> \lambda, b >> \lambda)$, в области малых углов θ $(\cos\theta \approx 1)$ первые множители в формулах (7.39), (7.40) $(1+\cos\theta)/2 \approx 1$, и диаграмму направленности фактически определяют интерференционные множители. Поэтому можно полагать, что :

$$F^{\mathrm{E}}(\theta) = \left| \frac{\sin(\frac{k_0 a}{2}\sin\theta)}{\frac{k_0 a}{2}\sin\theta} \right|, \tag{7.41}$$

$$F^{\mathrm{H}}(\theta) = \left| \frac{\sin(\frac{k_0 b}{2}\sin\theta)}{\frac{k_0 b}{2}\sin\theta} \right|. \tag{7.42}$$

Графически функция $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ представлена на рис. 7.9а., а соответствующая ей диаграмма направленности в полярной системе координат - на рис. 7.9 б.

Определим ширину главного лепестка диаграммы направленности в E - плоскости $2\theta_0^E$ как угол между ближайшими направлениями θ_1 и θ_2, в которых излучение отсутствует.

Из рис.7.9а следует, что нулевому уровню главного лепестка диаграммы направленности в направлении θ_1 (рис.7.9 б.) соответствует первый корень функции $\sin x / x$. При этом, с учетом (7.41), угол θ_0^E определяется из следующего уравнения :

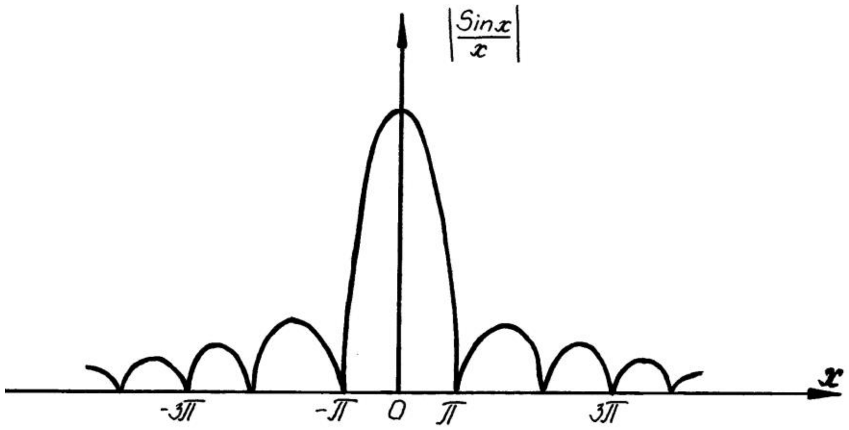
$$\frac{k_0 a}{2}\sin\theta_0^E = \pi \; . \tag{7.43}$$

Отсюда получаем : $\sin\theta_0^E = \dfrac{\lambda}{a}$, а $\theta_0^E = \arcsin\dfrac{\lambda}{a}$.

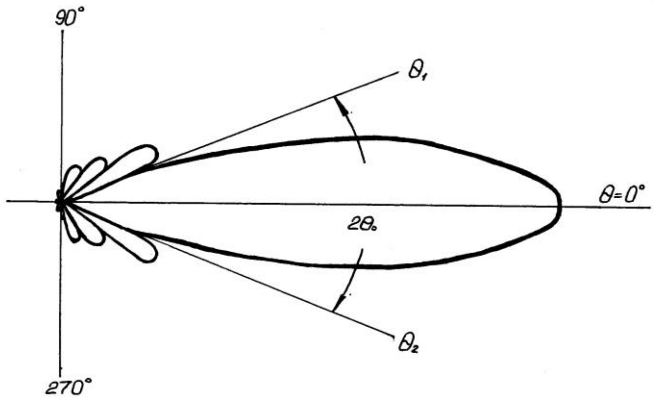
Для отверстия, у которого $a >> \lambda$, можно считать, что $\theta_0^E \approx \dfrac{\lambda}{a}$, и ширина главного лепестка диаграммы направленности “по нулям” в

E -плоскости определяется выражением:

$$2\theta_0^E \approx \frac{2\lambda}{a}. \tag{7.44}$$



а



б.

Рис. 7.9. Диаграмма направленности прямоугольного отверстия

Аналогично, если $b >> \lambda$, то ширина главного лепестка диаграммы направленности “по нулям” в H - плоскости определяется выражением:

$$2\theta_0^H \approx \frac{2\lambda}{b} \tag{7.45}$$

Отметим, что при увеличении размеров отверстия и (или) уменьшении длины волны из (7.44),(7.45) следует, что ширина главного лепестка диаграммы направленности сужается. При этом, если $\lambda \to 0$, то результат $\theta_0^{E,H} \to 0$ соответствует приближению геометрической оптики.

7.4. Основные понятия геометрической оптики

На весьма высоких частотах, когда производные по времени от функциональных представлений электромагнитного поля волны существенно больше производных по координатам, делается предположение о локально плоском характере поля волны, что приводит к геометрооптической лучевой трактовке процесса распространения волны.

Эта концепция широко используется при рассмотрении многих задач дифракции , а также задач рефракции - распространения электромагнитных волн в неоднородном пространстве, в том числе таких, как распространение земных, тропосферных и ионосферных волн, о которых пойдет речь в следующей главе.

7.4.1. Уравнение эйконала

Предположим, что на большом расстоянии от источников в неоднородной среде с параметрами $\varepsilon_a = \varepsilon_a(x, y, z)$, $\mu_a = \mu_a(x, y, z)$ распространяется волна, электромагнитное поле которой определяется выражениями:

$$\dot{\vec{E}}_m = \vec{\mathrm{E}} \cdot e^{-ik_0 L}, \quad \dot{\vec{H}}_m = \vec{\mathrm{H}} \cdot e^{-ik_0 L} \quad , \tag{7.46}$$

где $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ - постоянная распространения в вакууме;

$L = L(x, y, z)$ - некоторая скалярная функция, физический смысл которой рассмотрим ниже;

$\vec{\mathrm{E}}$, $\vec{\mathrm{H}}$ - вектора, составляющие которых в зависимости от координат изменяются значительно медленнее, чем от времени.

Подставляя эти выражения полей в первое уравнение Максвелла и используя соотношение векторного анализа :

$$rot\left(a \cdot \vec{b}\right) = a \cdot rot\,\vec{b} + \left[grad\, a,\ \vec{b}\right] ,$$

получаем:

$$rot\left(\vec{\mathrm{H}}e^{-ik_0 L}\right) = e^{-ik_0 L} rot\vec{\mathrm{H}} + \left[grad\left(e^{-ik_0 L}\right), \vec{\mathrm{H}}\right] =$$
$$= e^{-ik_0 L} rot\vec{\mathrm{H}} + \left[-ik_0 e^{-ik_0 L} grad\, L, \vec{\mathrm{H}}\right] = i\omega\varepsilon_a \vec{\mathrm{E}} e^{-ik_0 L}$$

В этом выражении k_0 очень велико, поэтому, пренебрегая первым слагаемым, получаем:

$$\left[\vec{\mathrm{H}}, grad\, L\right] = n_\varepsilon^2 \frac{1}{W_0} \vec{\mathrm{E}} \qquad (7.47)$$

где $n_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$, $W_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$ - волновое сопротивление вакуума.

Подставляя (7.46) во второе уравнение Максвелла, аналогично предыдущему получаем:

$$\left[\vec{\mathrm{E}}, grad\, L\right] = -n_\mu^2 W_0 \vec{\mathrm{H}} \quad , \qquad (7.48)$$

где $n_\mu = \sqrt{\mu}$.

Из выражений (7.47), (7.48) следует, что вектора $\vec{\mathrm{E}}, \vec{\mathrm{H}}, grad\, L$ образуют правовинтовую ортогональную тройку.

Подставляя $\vec{\mathrm{E}}$ из (7.47) в (7.48), получаем:

$$\left[grad\, L, \left[\vec{\mathrm{H}}, grad\, L\right]\right] = n^2 \vec{\mathrm{H}}\,, \qquad (7.49)$$

где $n = n_\varepsilon n_\mu = \sqrt{\varepsilon\mu}$ - коэффициент преломления среды.

Применяя к (7.49) соотношение векторного анализа :

$$\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})\,,$$

с учетом, что $\left(grad\, L, \vec{\mathrm{H}}\right) = 0$, получаем так называемое уравнение *эйконала* L (от греческого *эйкон* - изображение):

$$\left(grad\, L\right)^2 = n^2\,, \quad (7.50)$$

или

$$grad\, L = n\vec{L}^{\,0}\,, \qquad (7.51)$$

где $\vec{L}^{\,0} = \dfrac{grad\, L}{n}$ - единичный вектор (лучевой орт).

Уравнение эйконала (7.50) в развернутой форме :

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z) \tag{7.52}$$

представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Оно является основным соотношением геометрической оптики неоднородных сред.

Вектор Пойнтинга, определяющий направление движения энергии, $\vec{\Pi} = \left[\vec{\mathrm{E}}, \vec{\mathrm{H}}\right] \sim grad\, L = n\vec{L}^0$ показывает, что энергия волны движется вдоль $\vec{L}^0$.

Из выражений (7.47), (7.51) вытекает соотношение:

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}} = W_0 \frac{n}{n_\varepsilon^2} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = W_a,$$

где W_a - волновое сопротивление пространства.

Таким образом, в геометрооптическом приближении поле в каждой точке пространства носит характер плоской однородной волны, распространяющейся в направлении $\vec{L}^0$.

7.4.2. Уравнение луча

Значения $L = \mathrm{const}$ определяет эквифазную поверхность – фронт волны.

Семейство линий, ортогональных к эквифазным поверхностям, называется лучами.

По определению $\mathrm{grad}\, L$ перпендикулярен эквифазной поверхности $L = \mathrm{const}$, поэтому направление луча в каждой точке пространства совпадает с направлением $\mathrm{grad}\, L$ или $\vec{L}^0$.

В общем случае неоднородной среды эквифазные поверхности представляют собой изогнутые поверхности, а лучи – пространственные кривые, т.е. имеет место процесс непрерывного преломления (рефракция) электромагнитной волны.

Выведем уравнение луча, исходя из геометрии, представленной на рис. 7.10., где показана лишь одна координатная ось x.

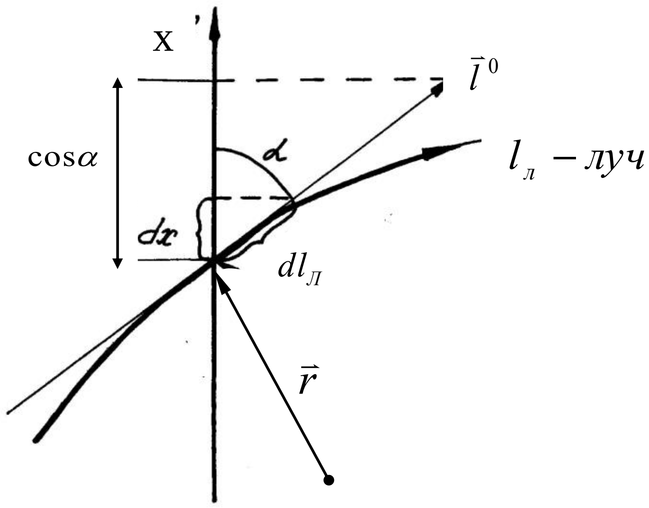


Рис. 7.10. К выводу уравнения луча

Здесь $\vec{l}^{\,0} = \vec{x}^0 l_x^0 + \vec{y}^0 l_y^0 + \vec{z}^0 l_z^0$ - единичный вектор, касательный к $l_Л$ в каждой точке пространства; $l_x^0 = \cos\alpha$, $l_y^0 = \cos\beta$, $l_z^0 = \cos\gamma$, где α, β, γ - направляющие углы $\vec{l}^{\,0}$.

По определению луча $\vec{l}^{\,0} = \vec{L}^{\,0}$.

$\vec{r} = \vec{x}^0 x + \vec{y}^0 y + \vec{z}^0 z$ - радиус-вектор текущей точки на луче.

Рассмотрим производную :

$$\frac{d\vec{r}}{dl_л} = \vec{x}^0 \frac{dx}{dl_л} + \vec{y}^0 \frac{dy}{dl_л} + \vec{z}^0 \frac{dz}{dl_л} = \\ = \vec{x}^0 \cos\alpha + \vec{y}^0 \cos\beta + \vec{z}^0 \cos\gamma = \vec{l}^{\,0} = \vec{L}^{\,0} \qquad (7.53)$$

Отсюда уравнение эйконала можно записать в виде :

$$grad\, L = n\vec{L}^{\,0} = n\vec{l}^{\,0} = n\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}l_Л}. \qquad (7.54)$$

Дифференцируя (7.54) слева и справа по $l_Л$, получаем :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l_Л}\left(n\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}l_Л}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l_Л} grad\, L = grad\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}l_Л}\right) =$$

$$= grad\left(\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l_Л} + \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l_Л} + \frac{\partial L}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l_Л}\right) =$$

$$= grad\left(grad\,L, \vec{l}^{\,0}\right) = grad\left(n\vec{L}^{\,0}, \vec{l}^{\,0}\right) = grad\, n\ . \qquad (7.55)$$

Из приведенных выкладок, в частности, следует, что $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}l_Л} = n$ или $\mathrm{d}L = n\mathrm{d}l_Л$, т.е. элемент длины пути $\mathrm{d}L$ равен элементу геометрического пути вдоль луча $\mathrm{d}l_Л$, умноженному на коэффициент преломления среды n. В оптике принято L называть оптической длиной пути.

Таким образом, дифференциальное уравнение луча второго порядка в векторной форме имеет вид :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l_Л}\left(n\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}l_Л}\right) = grad\, n \qquad (7.56)$$

В частном случае однородной среды ($n = \mathrm{const}$) имеем:

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}l_Л^2} = 0 \to \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}l_Л} = \mathrm{const}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l_Л} = \cos\alpha = \mathrm{const}\,; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l_Л} = \cos\beta = \mathrm{const}\,; \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l_Л} = \cos\gamma = \mathrm{const}\ ,$$

и луч представляет собой прямую линию.

При этом $L = nl_Л$, и функция, определяющая изменение фазы поля волны, принимает вид: $e^{-ik_0L} = e^{-ik_0nl_Л} = e^{-ik_al_Л}$

7.4.3. **Радиус кривизны луча**

В общем случае уравнение луча (7.56) описывает пространственную кривую, в каждой точке которой можно определить ее радиус кривизны ρ, являющийся важным параметром при практических расчетах тропосферных линий связи, о которых будет идти речь в следующей главе.

Рассмотрим на луче точки a и b, расстояние между которыми $ab = dl_л \to 0$ (рис.7.11.).

Единичный вектор $\vec{l}^{\,0}$ в точке b получает приращение $d\vec{l}^{\,0}$. Можно считать, что длина дуги ab $dl_л = \alpha\rho = \dfrac{\left|d\vec{l}^{\,0}\right|}{\left|\vec{l}^{\,0}\right|}\rho$, откуда получаем:

$$\rho = \frac{dl_л}{dl^0} \quad . \qquad (7.57)$$

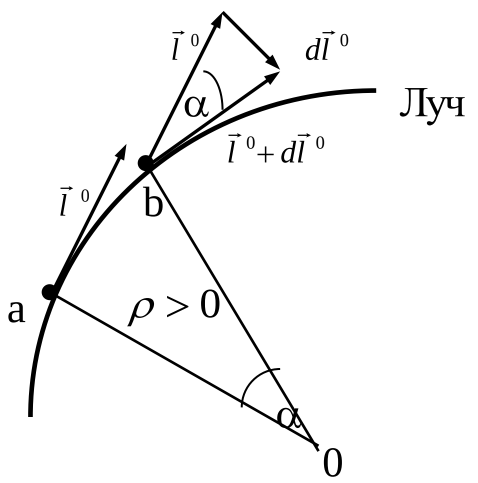


Рис. 7.11. К определению радиуса кривизны луча

Введем векторную характеристику кривизны луча:

$$\vec{K} = \frac{\vec{\rho}^{\,0}}{\rho} = \frac{d\vec{l}^{\,0}}{dl_л} \;, \qquad (7.58)$$

где единичный вектор $\vec{\rho}^{\,0}$ направлен вдоль $d\vec{l}^{\,0}$ противоположно выпуклости луча, и будем считать $\rho > 0$, если выпуклость направлена от центра кривизны в точке 0 .

В соответствии с (7.53) перепишем уравнение луча (7.56) в виде $\dfrac{d}{dl_л}\left(n\vec{l}^{\,0}\right) = grad\, n$, и, вычисляя производную слева с учетом, что по определению $\dfrac{dn}{dl_л} = grad\, n\, \vec{l}^{\,0}$, получаем:

$$n\frac{d\vec{l}^{\,0}}{dl_л} + \vec{l}^{\,0}\left(grad\, n\, \vec{l}^{\,0}\right) = grad\, n \,. \qquad (7.59)$$

Рассмотрим распространение электромагнитной волны в среде, коэффициент преломления которой зависит лишь от координаты z , т.е. на поверхности уровня $z = const$ $n = const$, а $grad\, n = \vec{z}^{\,0}\dfrac{dn}{dz}$.

Определим радиус кривизны луча (траектории движения волны) в точке q , где его направление $\vec{l}^{\,0}$ образует с $\vec{z}^{\,0}$ и с $grad\, n$ произвольный угол θ (рис. 7.12а.).

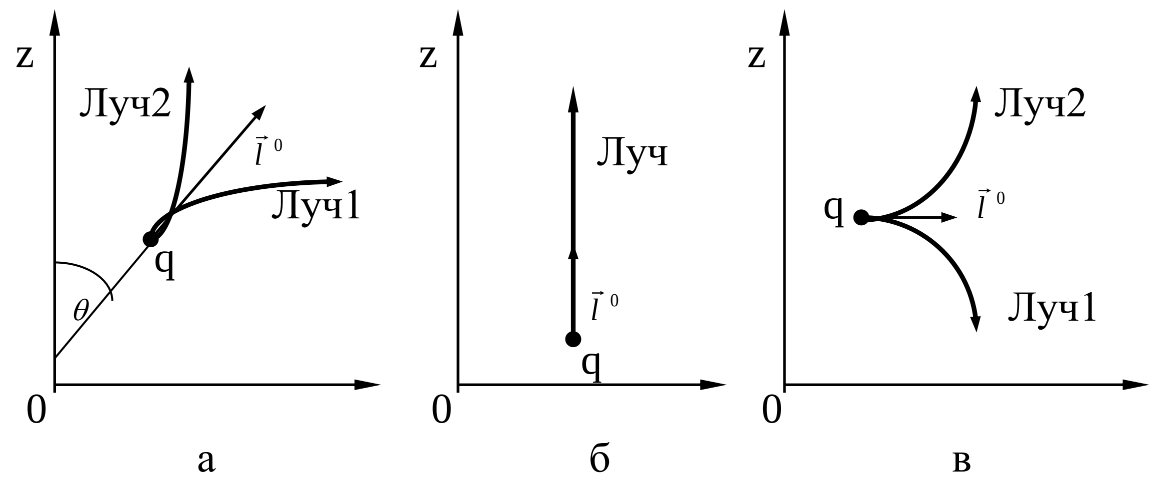


Рис. 7.12. Траектории движения волны.

При этом выражение (7.59) преобразуется к виду:

$$n\frac{d\vec{l}^{\,0}}{dl_л} + \vec{l}^{\,0}\frac{dn}{dz}\cos\theta = \vec{z}^{\,0}\frac{dn}{dz}\ ,\ \text{откуда}$$

$$\frac{d\vec{l}^{\,0}}{dl_л} = \frac{1}{n}\frac{dn}{dz}\left(\vec{z}^{\,0} - \vec{l}^{\,0}\cos\theta\right). \tag{7.60}$$

Подставляя (7.60) в (7.58), получаем:

$$\frac{\vec{\rho}^{\,0}}{\rho} = \frac{1}{n}\frac{dn}{dz}\left(\vec{z}^{\,0} - \vec{l}^{\,0}\cos\theta\right). \tag{7.61}$$

Отсюда, возведя левую и правую части в квадрат, находим:

$$\rho = -\frac{n}{\dfrac{dn}{dz}\sin\theta}\ . \tag{7.62}$$

Знак “минус” в (7.62) учитывает, что при $dn/dz < 0$ (плотность среды уменьшается с ростом z) радиус кривизны $\rho > 0$ (луч 1), а при $dn/dz > 0$ (плотность среды увеличивается с ростом z) радиус кривизны $\rho < 0$ (луч 2).

Если луч идет вдоль положительного направления оси z ($\theta = 0$) перпендикулярно поверхности уровня $z = const$, то из (7.62) находим, что в любом случае ($dn/dz < 0$, либо $dn/dz > 0$, либо $n = const$) $\rho = \infty$, т.е. луч представляет собой прямую линию, параллельную оси z (рис.7.12б). Если луч идет вдоль отрицательного направления оси z ($\theta = 180^0$), то аналогично получаем $\rho = \infty$.

Если луч идет вдоль поверхности уровня $z = const$ ($\theta = 90^0$), то радиус кривизны определяется выражением $\rho = -\frac{n}{\frac{dn}{dz}}$. В этом случае, если $dn/dz < 0$, то $\rho > 0$ (луч 1), а если $dn/dz > 0$, то $\rho < 0$ (луч 2) (рис.7.12в.).

Для протяженных тропосферных линий связи (см. раздел 8.3.2.), полагая, что $n \approx 1$, $\theta \approx 90^0$, радиус кривизны луча можно рассчитывать по формуле:

$$\rho = -\frac{1}{\frac{dn}{dz}} . \tag{7.63}$$

7.4.4. Принцип Ферма

Уравнение эйконала (7.51) проинтегрируем слева и справа по произвольной кривой l между точками A и B (рис. 7.13.):

$$\int\limits_{l} grad\, L\, \mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_{l} n\vec{L}^{\,0}\, \mathrm{d}\vec{l} \tag{7.64}$$

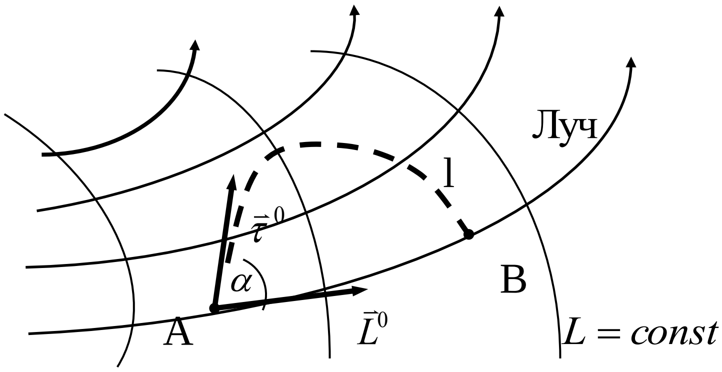


Рис. 7.13. К выводу принципа Ферма

С учетом того, что

$$grad\, L = \vec{x}^0 \frac{\partial L}{\partial x} + \vec{y}^0 \frac{\partial L}{\partial y} + \vec{z}^0 \frac{\partial L}{\partial z},$$

а $\mathrm{d}\vec{l} = \vec{x}^0 \,\mathrm{d}x + \vec{y}^0 \,\mathrm{d}y + \vec{z}^0 \,\mathrm{d}z,$

вычисление интеграла слева дает:

$$\int_l \mathrm{grad}\, L \,\mathrm{d}\vec{l} = \int_l \left(\frac{\partial L}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial L}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial L}{\partial z}\mathrm{d}z \right) = \int_A^B \mathrm{d}L = L(B) - L(A). \qquad (7.65)$$

Таким образом, интеграл слева не зависит от формы пути l.

Интеграл справа

$$\int_l n\vec{L}^0 d\vec{l} = \int_l n\vec{L}^0 \vec{\tau}^0 dl = \int_l n \cos\alpha\, dl, \qquad (7.66)$$

где α - угол между направлением луча и единичным вектором касательной $\vec{\tau}_0$ к пути интегрирования l.

Приравнивая (7.65) и (7.66), получаем:

$$\int_l n\cos\alpha \,\mathrm{d}l = L(B) - L(A) \qquad (7.67)$$

Если путь интегрирования совпадает с направлением луча $(\alpha = 0)$, то

$$\int_{l_л} n\,\mathrm{d}l = L(B) - L(A) \qquad (7.68)$$

Этот интеграл называется оптической длиной пути вдоль луча.

Из (7.68) следует, что оптическая длина пути вдоль луча между двумя эквифазными поверхностями всегда одна и та же, хотя геометрические длины пути могут быть различными (рис. 7.14.).

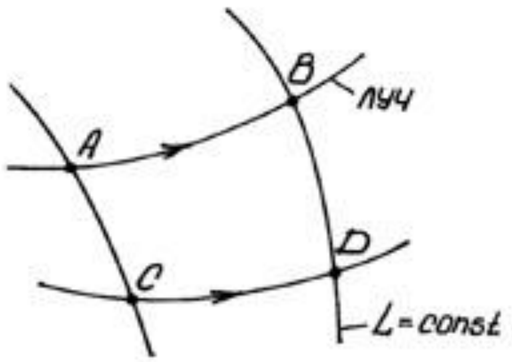


Рис. 7.14. Оптические и геометрические длины пути между эквифазными поверхностями

Из формул (7.67), (7.68) вытекает равенство

$$\int_{l_Л} n\,\mathrm{d}l = \int_{l} n\cos\alpha\,\mathrm{d}l\,,$$

которое с учетом, что $\cos\alpha \le 1$, преобразуется в соотношение:

$$\int_{l_Л} n\,\mathrm{d}l \le \int_{l} n\,\mathrm{d}l\,. \qquad (7.69)$$

Это неравенство выражает широко используемый в оптике принцип Ферма, который гласит, что оптическая длина пути между двумя точками пространства минимальна, если путь идет по лучу.

*   *   *

В заключение кратко обозначим границы применимости метода геометрической оптики при решении задач дифракции и рефракции.

1.Метод можно применять, если параметры среды ε, μ и амплитуда поля мало изменяются на расстояниях, равных длине волны в среде.

2.Метод можно применять, если кривизна поверхности объекта и фронта падающей волны мало меняются на расстоянии, равном длине волны, т.е. рассматриваемый случай близок к задаче о падении плоской волны на бесконечную плоскость.

3. Метод не применим в зоне тени, где геометрическая оптика дает чистый ноль поля, и в области полутени, где она дает разрыв поля на границе “свет – тень”.