2. Детерминированные сигналы и их математическое описание

Сигналом называется физический процесс, несущий информацию или предназначенный для её передачи. Сигнал рассматривается как физический носитель информации.

Детерминированным называется сигнал, характеристики которого могут быть определены в любой момент времени с вероятностью равной единице. Детерминированный сигнал описывается функцией времени $s(t)$, которая, отражает закон изменения во времени напряжения между какими-либо узлами цепи или тока в какой-либо её ветви. Функцию $s(t)$ обычно тоже называют сигналом. При теоретических исследованиях могут вводится также и комплексные сигналы.

Энергией сигнала, сосредоточенной на интервале времени $[t_1, t_2]$ называется величина

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} s(t)s^*(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt, \qquad (2.1)$$

которая представляет собой энергию, выделяемую на единичном активном сопротивлении, напряжение на котором (или ток, через которое) описывается законом $s(t)$.

Полной энергией сигнала (или просто энергией сигнала) называется энергия, которая выделяется на единичном активном сопротивлении при воздействии на него сигнала неограниченное время

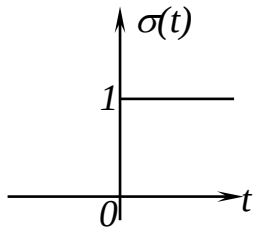
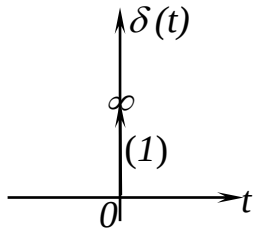
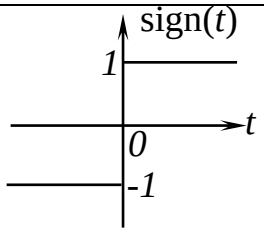
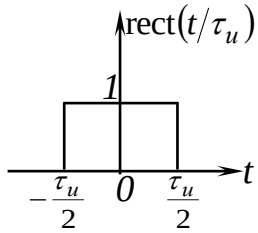
$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt. \qquad (2.2)$$

Физически реализуемый сигнал порождается реальным источником и должен обладать конечной энергией, то есть функция, описывающая сигнал является квадратично-интегрируемой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < \infty. \qquad (2.3)$$

Часто временная функция, описывающая сигнал, имеет разрывы (пределы в точке разрыва справа и слева не совпадают). Для построения математических выражений, описывающих такие сигналы, используют специальные функции, называемые также разрывными. Определения, графики и характеристики разрывных функций приведены в табл.2.1.

Табл.2.1. Разрывные функции

определение	график	спектр	примечание
Функция Хэвисайда $\sigma(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 0.5, & t=0\\ 1, & t>0\end{cases}$		$S_\sigma(\omega)=0.5\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$	$\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(x)dx$
Функция Дирака (дельта - функция) $\delta(t)=\frac{d\sigma(t)}{dt}$		$S_\delta(\omega)=1$	$\int_{+\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$ $\int_{+\infty}^{+\infty}s(t)\delta(t-t_0)dt=s(t_0)$
Знаковая функция $\mathrm{sign}(t)=\begin{cases}-1, & t<0\\ 0, & t=0\\ 1, & t>0\end{cases}$		$S_{\mathrm{sign}}(\omega)=\frac{2}{j\omega}$	$\mathrm{sign}(t)=\sigma(t)-\sigma(-t)$
Прямоугольный импульс $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau_u}\right)=\begin{cases}1, & \lvert t\rvert<0.5\tau_u\\ 0.5, & \lvert t\rvert=0.5\tau_u\\ 0, & \lvert t\rvert>0.5\tau_u\end{cases}$		$S_0(\omega)=\tau_u\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau_u}{2}\right)$	$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau_u}\right)=$ $\sigma\left(t+\frac{\tau_u}{2}\right)-\sigma\left(t-\frac{\tau_u}{2}\right)$

Сигнал может быть представлен в виде совокупности своих гармонических составляющих:

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \qquad (2.4)$$

Это представление соответствует детерминированной модели вселенной: ограниченный во времени сигнал получается наложением неограниченных во времени гармонических сигналов, то есть составляющие сигнала существуют задолго до его появления, - существование сигнала, таким образом, может быть предсказано в любой момент времени с вероятностью равной единице.

Функция $S(\omega)$ называется спектральной плотностью (спектральной функцией или спектром) сигнала и характеризует распределение по частоте комплексных амплитуд гармонических составляющих сигнала, в общем случае является комплексной

функцией:

$$S(\omega) = |S(\omega)|e^{j\varphi_S(\omega)}. \qquad (2.5)$$

Модуль спектральной плотности $|S(\omega)|$ называется амплитудным спектром и характеризует распределение амплитуд гармонических составляющих сигнала по частоте.

Аргумент спектральной плотности $\varphi_S(\omega)$ называется фазовым спектром сигнала и характеризует распределение начальных фаз гармонических составляющих сигнала по частоте.

Спектральная плотность сигнала определяется выражением

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (2.6)$$

Выражения (2.4) и (2.6) называются обратным и прямым преобразованием Фурье. Сигнал и его спектральная плотность представляют собой две, однозначно связанные функции, что позволяет говорить о их математическом «равноправии». Сигнал, таким образом, может быть описан как временной $s(t)$, так и спектральной функцией $S(\omega)$. Взаимно-однозначное соответствие по Фурье обозначается символом «↔»:

$$s(t) \leftrightarrow S(\omega).$$

Энергия сигнала, при его описании спектральной функцией, определяется по формуле:

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)S^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \qquad (2.7)$$

В случае, когда сигнал описывается действительной функцией времени, спектральная плотность удовлетворяет условию сопряжённой симметрии, амплитудный спектр является чётно-симметричным, а фазовый – нечётно-симметричным:

$$\begin{gathered} s(t) \in \mathbb{R} \Longrightarrow S(-\omega) = S^*(\omega), \\ |S(-\omega)| = |S(\omega)|, \\ \varphi_S(-\omega) = -\varphi_S(\omega). \end{gathered} \qquad (2.8)$$

С учётом (2.8) выражение (2.4) можно привести к виду:

$$s(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} |S(\omega)|\cos\left(\omega t + \varphi_S(\omega)\right)d\omega, \qquad (2.9)$$

то есть в состав действительного сигнала входят гармоники $\frac{1}{\pi}|S(\omega)|\cos\left(\omega t + \varphi_S(\omega)\right)d\omega$.

Когда спектральная плотность сигнала действительна, то сигнал удовлетворяет условию сопряжённой симметрии

$$S(\omega) \in \mathbb{R} \Longrightarrow s(-t) = s^*(t). \qquad (2.10)$$

Определение спектров сигналов удобно производить с учётом свойств преобразования Фурье, использование которых, в ряде случаев, позволяет избежать непосредственного расчёта интеграла (2.6) путём сведения задачи к предыдущей, ранее решённой. Некоторые свойства преобразования Фурье приведены в табл.2.2.

Табл.2.2. Свойства преобразования Фурье

№ п\п	сигнал	спектр
1	$k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t),\ k_{1,2} = const$	$k_1 S_1(\omega) + k_2 S_2(\omega)$
2	$s(t \pm t_0),\ t_0 > 0$	$S(\omega) e^{\pm j\omega t_0}$
3	$\dfrac{d^n s(t)}{dt^n}, n \geq 0$	$(j\omega)^n S(\omega)$
4	$t^n s(t)$	$j^n \dfrac{d^n S(\omega)}{d\omega^n}$
5	$s(at),\ a > 0$	$(1/a) S(\omega/a)$

Последняя строка табл.2 отражает поведение сигнала и спектра при масштабных преобразованиях: увеличению длительности сигнала соответствует уменьшение ширины его спектра. При этом произведение длительности $\tau_и$ сигнала на ширину спектра Δf остаётся неизменным, определяется формой сигнала и называется его базой

$$B_f = \Delta f \tau_и. \qquad (2.11)$$

При исследовании радиотехнических систем важным классом сигналов являются узкополосные сигналы (радиосигналы) – это сигналы, ширина спектра которых гораздо меньше чем несущая частота. Радиосигнал описывается выражением

$$s(t) = v(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \qquad (2.12)$$

где ω_0 – несущая частота, $v(t) > 0$ – огибающая сигнала, $\varphi(t)$ – мгновенная фаза сигнала.

Мгновенной частотой радиосигнала называется производная его полной фазы:

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}. \qquad (2.13)$$

При описании радиосигналов вводят комплексную огибающую

$$\dot{v}(t) = v(t)e^{j\varphi(t)}, \qquad (2.14)$$

что обеспечивает возможность рассмотрения общих свойств радиосигналов, отличающихся только значением несущей частоты. Огибающая и мгновенная фаза радиосигнала должны быть такими, чтобы комплексная огибающая представляла собой функцию, максимальная частота спектра которой гораздо меньше, чем несущая частота радиосигнала ω_0. Исследование радиосигнала, таким образом, формально переносится в область низких частот.

Радиосигнал полностью определяется своей комплексной огибающей и значением несущей частоты:

$$s(t) = \mathrm{Re}\dot{v}(t)e^{j\omega_0 t}. \qquad (2.15)$$

При сложении радиосигналов их комплексные огибающие складываются

$$\dot{v}_{s1+s2}(t) = \dot{v}_{s1}(t) + \dot{v}_{s2}(t). \qquad (2.16)$$

Определим энергию радиосигнала

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2(t)cos^2(\omega_0 t + \varphi(t))dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2(t)}{2} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2(t)}{2} cos(2\omega_0 t + 2\varphi(t))dt.$$

Значением второго интеграла можно пренебречь, как интеграла от быстро-осциллирующей функции, в результате получим

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} v^2(t)dt. \qquad (2.17)$$

Энергия комплексной огибающей радиосигнала определяется энергией его огибающей:

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{v}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2(t)dt. \qquad (2.18)$$

Сравнивая (2.17) и (2.18) установим, что энергия радиосигнала в два раза меньше, чем энергия его огибающей

$$E = \frac{1}{2}E_v. \qquad (2.19)$$

Спектральную плотность радиосигнала можно представить в виде:

$$S(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}\dot{V}(\omega - \omega_0), \omega > 0 \\ \frac{1}{2}\dot{V}^*\big(-(\omega + \omega_0)\big), \omega < 0 \end{cases}, \qquad (2.20)$$

где $\dot{V}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t) e^{-j\Omega t} dt$ – спектральная плотность комплексной огибающей радиосигнала.

Главная страница