

4. Линейные радиотехнические цепи, их основные характеристики и методы анализа

Радиотехническая цепь называется линейной (ЛЦ), если для неё выполняется принцип суперпозиции (рис.4.1): реакция линейной цепи $s_{\text{ВЫХ}}(t)$ на воздействие $s_{\text{ВХ}}(t)$ в виде линейной комбинации с коэффициентами k_1 и k_2

$$s_{\text{ВХ}}(t) = k_1 s_{\text{ВХ1}}(t) + k_2 s_{\text{ВХ2}}(t) \quad (4.1)$$

двух сигналов $s_{\text{ВХ1}}(t)$ и $s_{\text{ВХ2}}(t)$ есть такая же линейная комбинация отдельных её реакций $s_{\text{ВЫХ1}}(t)$ и $s_{\text{ВЫХ2}}(t)$ на каждый из этих сигналов

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = k_1 s_{\text{ВЫХ1}}(t) + k_2 s_{\text{ВЫХ2}}(t). \quad (4.2)$$

Иными словами, при совокупном воздействии, сигналы преобразуются линейной цепью независимо, не оказывают влияния друг на друга. Поэтому основные операции по обработке радиосигналов в приёмном устройстве РТС осуществляются устройствами на основе линейных цепей, что обеспечивает отсутствие взаимодействия полезного сигнала и аддитивной помехи.

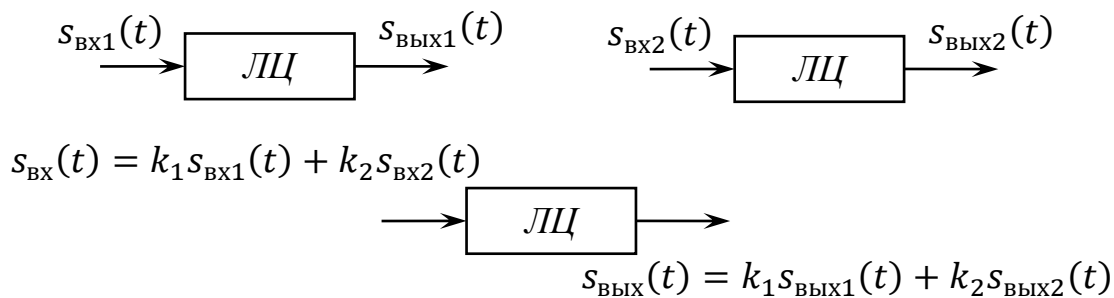


Рис.4.1. К принципу суперпозиции

Для линейной цепи с постоянными параметрами выполняется также и принцип транспозиции (инвариантности гармонического воздействия и реакции): при гармоническом воздействии в цепи со временем устанавливается стационарный режим, в котором напряжение между её узлами и токи, протекающие по её ветвям, изменяются по гармоническому закону, с частотой, равной частоте воздействия. Реакция цепи, таким образом, тоже является гармонической (рис.4.2).

В дальнейшем, если это не оговорено в особом порядке, рассматриваются линейные цепи с постоянными параметрами.

Основными характеристиками линейной цепи являются:

1. Импульсная характеристика (ИХ),

2. Переходная характеристика (ПХ),
3. Комплексная частотная характеристика (КЧХ),
4. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ),
5. Фазо-частотная характеристика (ФЧХ).

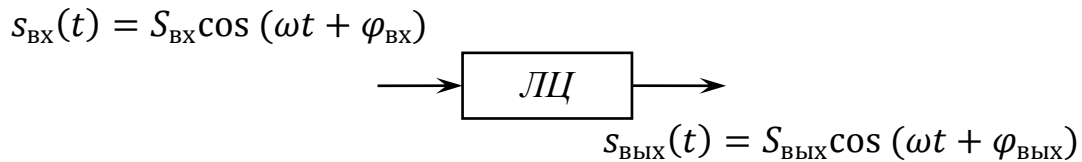


Рис.4.2. К принципу транспозиции

Импульсной характеристикой $h(t)$ называется реакция цепи на воздействие в виде δ – импульса (рис.4.3).



Рис.4.3. К определению ИХ и ПХ

Импульсная характеристика определяется в режиме покоя цепи, то есть при условии, что в момент воздействия запас энергии в индуктивных и ёмкостных элементах цепи отсутствовал. Для физически реализуемой цепи импульсная характеристика может быть отлична от нуля только при положительных значениях временного аргумента

$$h(t)|_{t < 0} = 0. \quad (4.3)$$

Это соответствует принципу причинности, согласно которому реакция на выходе цепи не может появиться раньше воздействия и, поскольку δ -импульс действует в момент времени $t = 0$, должно выполняться указанное свойство импульсной характеристики.

Переходной характеристикой $g(t)$ называется реакция цепи на единичный скачок $\sigma(t)$ (рис.4.3). Переходная характеристика определяется в режиме покоя цепи и может быть отлична от нуля только при положительных значениях временного аргумента

$$g(t)|_{t < 0} = 0. \quad (4.4)$$

Переходная и импульсная характеристики связаны между собой:

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}, \quad (4.5)$$

$$g(t) = \int_0^t h(t') dt'. \quad (4.6)$$

Частотные характеристики цепи определяются в стационарном режиме при гармоническом воздействии. Запишем выражения для гармонического сигнала на входе и выходе цепи:

$$s_{\text{BX}}(t) = S_{\text{BX}} \cos(\omega t + \varphi_{\text{BX}}), \quad (4.7)$$

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = S_{\text{ВЫХ}} \cos(\omega t + \varphi_{\text{ВЫХ}}). \quad (4.8)$$

Комплексной частотной характеристикой (КЧХ) называется зависимость от частоты отношения комплексной амплитуды выходного гармонического сигнала к комплексной амплитуде входного:

$$H(\omega) = \frac{\dot{S}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{S}_{\text{BX}}}, \quad (4.9)$$

где $\dot{S}_{\text{BX}} = S_{\text{BX}} e^{j\varphi_{\text{BX}}}$, $\dot{S}_{\text{ВЫХ}} = S_{\text{ВЫХ}} e^{j\varphi_{\text{ВЫХ}}}$. КЧХ является комплексной функцией частоты.

Импульсная и комплексная частотная характеристики связаны между собой как пара преобразований Фурье:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (4.10)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.11)$$

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) называется зависимость от частоты отношения амплитуды выходного гармонического сигнала к амплитуде входного гармонического сигнала:

$$|H(\omega)| = \frac{S_{\text{ВЫХ}}}{S_{\text{BX}}}. \quad (4.12)$$

АЧХ характеризует влияние цепи на амплитуду гармонического сигнала, является действительной, положительной функцией частоты, может быть определена как модуль комплексной частотной характеристики.

Фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) называется зависимость от частоты разности фаз между входным и выходным гармоническими сигналами:

$$\psi(\omega) = \varphi_{\text{ВЫХ}} - \varphi_{\text{BX}}. \quad (4.13)$$

ФЧХ может быть определена как аргумент комплексной частотной характеристики

$$\psi(\omega) = \arg H(\omega). \quad (4.14)$$

Импульсная характеристика реализуемой цепи, в соответствии с определением, описывает сигнал на её выходе и является действительной функцией. Поэтому, КЧХ, как преобразование

Фурье от действительной функции, обладает свойством сопряжённой симметрии (2.8), АЧХ чётно-симметрична, ФЧХ нечётно-симметрична:

$$H(-\omega) = H^*(\omega), \quad (4.15)$$

$$|H(-\omega)| = |H(\omega)|, \quad (4.16)$$

$$\psi(-\omega) = -\psi(\omega). \quad (4.17)$$

При анализе прохождения детерминированных сигналов через цепи известен сигнал на входе и структура цепи, которая однозначно определяет её характеристики, и требуется найти сигнал на выходе. Задача анализа может быть решена различными методами.

Метод наложения основан на принципе суперпозиции и предполагает представление входного сигнала в виде линейной комбинации более простых сигналов, реакции исследуемой цепи на которые уже известны, или легко могут быть определены. В качестве примера применения метода рассмотрим анализ прохождения через линейную цепь прямоугольного импульса (рис.4.4).

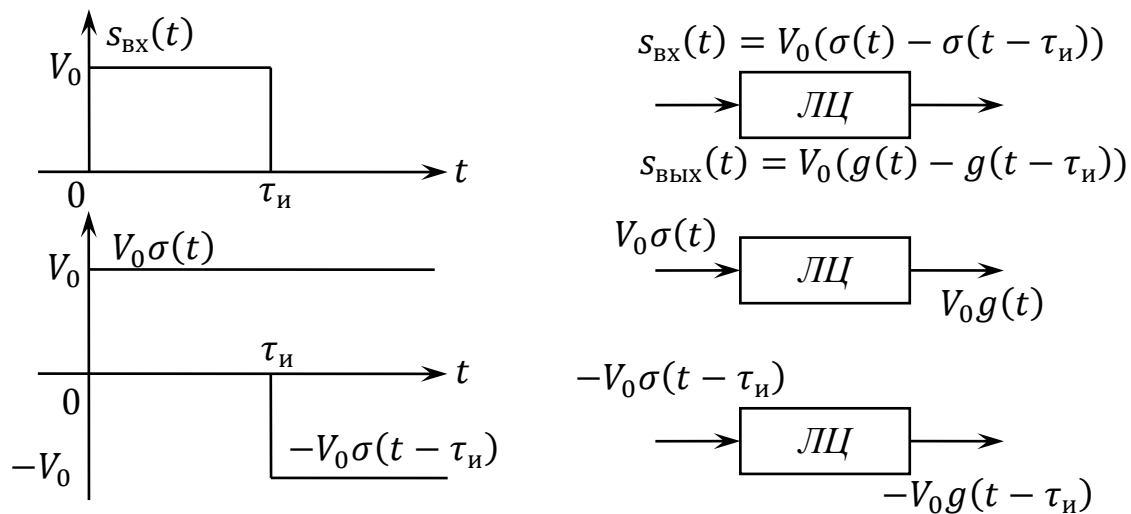


Рис.4.4. Анализ линейной цепи методом наложения при воздействии прямоугольного импульса

Прямоугольный импульс можно представить в виде линейной комбинации единичных скачков

$$s_{\text{BX}}(t) = V_0(\sigma(t) - \sigma(t - \tau_{\text{и}})). \quad (4.18)$$

Реакция линейной цепи на единичный скачок $V_0\sigma(t)$ есть её переходная характеристика $V_0g(t)$. Если единичный скачок запаздывает на $\tau_{\text{и}}$, то и реакция на него последует с таким же запаздыванием, то есть реакцией на $-V_0\sigma(t - \tau_{\text{и}})$ является $-V_0g(t - \tau_{\text{и}})$.

С учётом принципа суперпозиции, складывая отдельные реакции цепи, находим

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = V_0(g(t) - g(t - \tau_{\text{и}})). \quad (4.19)$$

Представление сигнала в виде линейной комбинации более простых сигналов в общем случае не формализовано. В частном, но довольно распространённом случае, сигнал представляется в виде совокупности запаздывающих δ -импульсов и решение задачи анализа прохождения сигнала через цепь даётся формулой Дюамеля:

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\text{ВХ}}(t')h(t - t')dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\text{ВХ}}(t - t')h(t')dt'. \quad (4.20)$$

Последняя запись также означает, что преобразованию, осуществляемому линейной цепью, соответствует оператор свёртки.

Спектральный метод анализа цепей предполагает описание входного и выходного сигналов их спектральными функциями. Цепь характеризуется комплексной частотной характеристикой. Спектральная плотность сигнала на выходе цепи может быть найдена путём умножения спектральной плотности сигнала на входе на КЧХ цепи:

$$S_{\text{ВЫХ}}(\omega) = H(\omega)S_{\text{ВХ}}(\omega), \quad (4.21)$$

Амплитудный и фазовый спектры сигнала на выходе цепи

$$|S_{\text{ВЫХ}}(\omega)| = |H(\omega)||S_{\text{ВХ}}(\omega)|, \quad (4.22)$$

$$\varphi_{S_{\text{ВЫХ}}}(\omega) = \psi(\omega) + \varphi_{S_{\text{ВХ}}}(\omega), \quad (4.23)$$

При анализе преобразования стационарных случайных процессов линейными цепями известны корреляционная функция или спектральная плотность мощности процесса на входе и структура цепи (её характеристики). В результате анализа определяются корреляционная функция или спектральная плотность мощности процесса на выходе (рис.4.5).

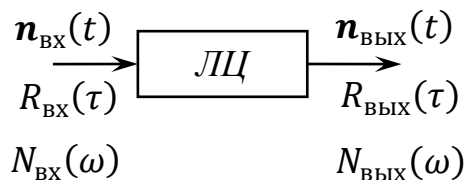


Рис.4.5. Преобразование случайного процесса ЛЦ

Корреляционная функция процесса на выходе цепи определяется как свёртка корреляционной функции процесса на входе и автокорреляционной функции импульсной характеристики цепи

$$\begin{aligned} R_{\text{ВЫХ}}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\text{ВХ}}(\tau') \chi(\tau - \tau') d\tau' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\text{ВХ}}(\tau - \tau') \chi(\tau') d\tau'. \end{aligned} \quad (4.24)$$

где $\chi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)h(t - \tau)dt$ – автокорреляционная функция импульсной характеристики цепи.

Спектральная плотность мощности процесса на выходе цепи может быть определена умножением квадрата АЧХ цепи на спектральную плотность мощности процесса на входе:

$$N_{\text{ВЫХ}}(\omega) = |H(\omega)|^2 N_{\text{ВХ}}(\omega) \quad (4.25)$$

В частном случае, когда процесс на входе цепи – белый шум, $R_{\text{ВХ}}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ и (4.24), с учётом фильтрующего свойства дельта-функции (см.табл.2.1) , перепишется в виде:

$$R_{\text{ВЫХ}}(\tau) = \frac{N_0}{2} \chi(\tau). \quad (4.26)$$

При этом для дисперсии процесса на выходе получим

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = R_{\text{ВЫХ}}(0) = \frac{N_0}{2} \chi(0) = \frac{N_0 E_h}{2}, \quad (4.27)$$

где $E_h = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$ – энергия импульсной характеристики цепи.

К особому классу относят узкополосные (радиочастотные) цепи (УПЦ) – цепи полоса пропускания $\Delta\omega$ которых гораздо меньше центральной частоты АЧХ. График АЧХ узкополосной цепи локализован в области высоких частот, в окрестности центральной частоты ω_0 . Ввиду (4.11) импульсная характеристика узкополосной цепи является узкополосным сигналом

$$h(t) = v_h(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_h(t)), \quad (4.28)$$

где $v_h(t)$, $\varphi_h(t)$ – огибающая и мгновенная фаза импульсной характеристики.

Комплексная огибающая импульсной характеристики:

$$\dot{v}_h(t) = v_h(t) e^{j\varphi_h(t)}. \quad (4.29)$$

Комплексная частотная характеристика УПЦ, как преобразование Фурье от импульсной характеристики, может быть представлена в виде

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} \dot{V}_h(\omega - \omega_0), \omega > 0 \\ \frac{1}{2} \dot{V}_h^*(-(\omega + \omega_0)), \omega < 0 \end{cases}, \quad (4.30)$$

где $\dot{V}_h(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_h(t) e^{-j\Omega t} dt$ – спектральная плотность комплексной огибающей импульсной характеристики. Обозначив

$$H_{\text{НЧЭ}}(\Omega) = \frac{1}{2} \dot{V}_h(\Omega), \quad (4.31)$$

выражение для КЧХ цепи перепишем в виде:

$$H(\omega) = \begin{cases} H_{\text{НЧЭ}}(\omega - \omega_0), & \omega > 0 \\ H_{\text{НЧЭ}}^*(-(\omega + \omega_0)), & \omega < 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

Последнее выражение показывает, что КЧХ узкополосной цепи может быть получена путём переноса в окрестность частоты ω_0 комплексной частотной характеристики некоторой низкочастотной цепи, КЧХ которой сосредоточена в районе нулевой частоты. Такая цепь называется низкочастотным эквивалентом (НЧЭ).

Комплексную частотную характеристику низкочастотного эквивалента можно получить путём переноса комплексной частотной характеристики узкополосной цепи в область низких частот

$$H_{\text{НЧЭ}}(\Omega) = H(\omega > 0)|_{\omega=\Omega+\omega_0}. \quad (4.33)$$

Применяя обратное преобразование Фурье к обеим частям (4.31), для импульсной характеристики низкочастотного эквивалента запишем

$$h_{\text{НЧЭ}}(t) = \frac{1}{2} \dot{v}_h(t). \quad (4.34)$$

Полученное выражение определяет переход от импульсной характеристики узкополосной цепи к импульсной характеристике низкочастотного эквивалента. Выразив импульсную характеристику УПЦ через её комплексную огибающую, получим выражение, определяющее обратный переход:

$$h(t) = 2\text{Re}(h_{\text{НЧЭ}}(t)e^{j\omega_0 t}) \quad (4.35)$$

Записанные выражения (4.32)-(4.35) определяют однозначный переход от узкополосной цепи к её низкочастотному эквиваленту и обратно. Выражение (4.34) показывает, что импульсная характеристика НЧЭ в общем случае является комплексной функцией, то есть низкочастотный эквивалент это не всегда физически осуществимая цепь и должна рассматриваться в качестве абстракции, конструируемой для использования в теоретических целях.

При анализе прохождения узкополосного сигнала

$$s_{\text{ВХ}}(t) = v_{\text{ВХ}}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_{\text{ВХ}}(t)) \quad (4.36)$$

через узкополосную цепь (рис.4.6), сигнал на выходе также является узкополосным

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = v_{\text{ВЫХ}}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_{\text{ВЫХ}}(t)). \quad (4.37)$$

Комплексная огибающая сигнала на выходе отыскивается как реакция НЧЭ цепи на комплексную огибающую входного сигнала методом наложения или спектральным методом:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{\text{ВЫХ}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_{\text{ВХ}}(t') h_{\text{НЧЭ}}(t - t') dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_{\text{ВХ}}(t - t') h_{\text{НЧЭ}}(t') dt', \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\dot{V}_{\text{ВЫХ}}(\Omega) = \dot{V}_{\text{ВХ}}(\Omega) H_{\text{НЧЭ}}(\Omega). \quad (4.39)$$

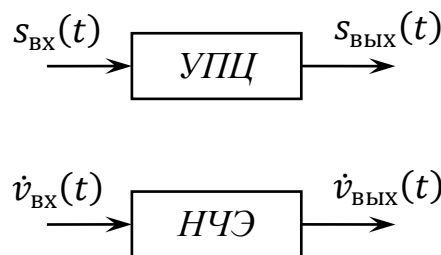


Рис.4.6. Анализ узкополосной цепи

[Главная страница](#)

