

5. Корреляционная обработка сигналов

5.1. Различение сигналов.

Коэффициент корреляции сигналов

Одной из задач, решаемых при обработке сигналов, является их различение. В качестве примера рассмотрим различение детерминированных сигналов с одинаковой энергией. При этом на известном временном интервале $[0, T_c]$ на входе устройства различения сигналов (различителя) действует сигнал $s_k(t)$ из ансамбля детерминированных сигналов $\{s_i(t)\}_{i=0}^{N-1}$ с одинаковыми энергиями

$$E = E_i = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i(t)s_i^*(t)dt, i = 0, \dots, N - 1. \quad (5.1)$$

Сигналы равны нулю вне интервала $[0, T_c]$.

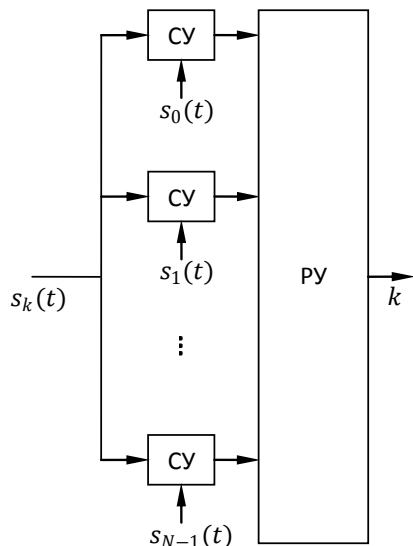


Рис.5.1. Структурная схема различителя сигналов с одинаковой энергией

От различителя сигналов требуется определить какой из известных сигналов поступил на его вход. Структурная схема различителя показана на рис.5.1. Различитель располагает эталонами (образцами) сигналов и сравнивает сигнал, поступивший на вход, с каждым из эталонов. По результатам сравнения, осуществляемом в сравнивающих устройствах (СУ), в решающем устройстве (РУ) принимается решение о том, какой из сигналов действует на входе.

В основу различения сигналов, таким образом, положено их сравнение. При сравнении сигналов устанавливается степень их взаимного соответствия по форме. Для действительных сигналов сравнение означает выявление равномасштабного подобия временных диаграмм сравниваемых сигналов.

Мерой степени подобия сигналов является энергия разностного сигнала:

$$\varepsilon_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{12}(t)\Delta_{12}^*(t)dt, \quad (5.2)$$

где $\Delta_{12}(t) = s_1(t) - s_2(t)$. В случае, когда сигналы совпадают,

разностный сигнал равен нулю и равна нулю введенная величина. Чем меньше значение энергии разностного сигнала, тем больше сигналы «похожи» друг на друга.

Рассмотрим подробнее структуру выражения (5.2):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (s_1(t) - s_2(t))(s_1(t) - s_2(t))^* dt = \\ &= E_1 + E_2 - R_{12} - R_{21},\end{aligned}\quad (5.3)$$

где E_1, E_2 - энергии сигналов;

$R_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2^*(t)dt$ - коэффициент корреляции между сигналами. Выражение, определяющее коэффициент корреляции называется корреляционным интегралом.

Коэффициент корреляции обладает сопряжённой симметрией относительно своих индексов, а при $s_1(t) = s_2(t)$ совпадает с энергией сигнала:

$$R_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2^*(t)dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} s_1^*(t)s_2(t)dt\right)^* = R_{21}^*, \quad (5.4)$$

$$R_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_1^*(t)dt = E_1. \quad (5.5)$$

Используя равенство Парсеваля коэффициент корреляции можно выразить через спектральные плотности сигналов

$$R_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega)S_2^*(\omega)d\omega. \quad (5.6)$$

С учётом свойств коэффициента корреляции выражение для энергии разностного сигнала перепишем в виде

$$\varepsilon_{12} = E_1 + E_2 - R_{12} - R_{21}^* = E_1 + E_2 - 2\operatorname{Re}(R_{12}) \quad (5.7)$$

Из последнего выражения видно, что поскольку энергия разностного сигнала является положительной величиной $\varepsilon_{12} \geq 0$, то действительная часть коэффициента корреляции не превосходит полусуммы энергии сравниваемых сигналов:

$$\operatorname{Re}(R_{12}) \leq \frac{E_1 + E_2}{2}. \quad (5.8)$$

Чем больше значение действительной части коэффициента корреляции, тем меньше энергия разностного сигнала и тем больше сигналы подобны друг другу по форме. При совпадении сравниваемых сигналов коэффициент корреляции максимален и равен их энергии (5.5). Таким образом, сравнение сигналов может осуществляться и на основе анализа значения коэффициента корреляции. При этом гарантируется, что максимальное значение действительной части коэффициента корреляции будет получено только в том канале устройства различения сигналов (рис.5.1),

где произошло совпадение по форме обрабатываемого и эталонного сигналов. Номер этого канала будет установлен решающим устройством различителя по максимальному отклику.

Как следует из (5.4) и (5.5), модуль коэффициента корреляции является симметричным относительно индексов, при их совпадении равен энергии сигнала

$$|R_{12}| = |R_{21}|, \quad (5.9)$$

$$|R_{11}| = E_1. \quad (5.10)$$

Используя неравенство Буняковского – Шварца также можно записать

$$|R_{12}| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_1^*(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t) s_2^*(t) dt} = \sqrt{E_1 E_2}, \quad (5.11)$$

где равенство достигается при совпадении сигналов.

В случае, когда энергии сигналов равны $E_1 = E_2 = E$ установленные свойства (5.8), (5.11) коэффициента корреляции переписутся в виде:

$$\operatorname{Re}(R_{12}) \leq E, \quad (5.12)$$

$$|R_{12}| \leq E, \quad (5.13)$$

где равенство достигается при $s_1(t) = s_2(t)$.

Свойства модуля коэффициента корреляции аналогичны свойствам его действительной части, поэтому при сравнении сигналов может использоваться и модуль коэффициента корреляции.

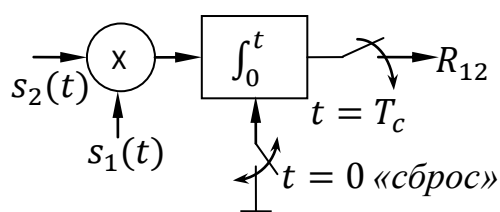


Рис.5.2. Структурная схема коррелятора

Структурная схема устройства для получения корреляционного интеграла (коррелятора) в случае действительных сигналов показана на рис.5.2. В момент $t = 0$, когда начинают действовать сигналы, осуществляется сброс интегратора.

Значение коэффициента корреляции снимается с выхода интегратора по окончании действия сигналов в момент времени $t = T_c$.

Один из входов коррелятора можно условно считать опорным. На второй вход поступает тестируемый сигнал. При формировании отклика коррелятора вычисляется произведение опорного и тестируемого сигналов, и интегратор определяет площадь

под графиком этого произведения. На интервалах времени, когда сигналы имеют одинаковую полярность, результат интегрирования увеличивается. На интервалах времени, когда один из сигналов принимает малые значения, результат интегрирования изменяется незначительно. На интервалах времени, где опорный и тестируемый сигнал имеют разные полярности, результат их перемножения отрицательный и происходит уменьшение результата интегрирования.

Таким образом, в случае, когда графики сигналов различаются, например, один сигнал принимает большие значения, когда близок к нулю второй сигнал, или могут встречаться интервалы, на которых сигналы имеют различную полярность, реакция коррелятора будет мала, либо отрицательна. В случае, когда графики сигналов подобны, их полярность и интервалы больших значений совпадают, и результат интегрирования их произведения даёт большие значения.

5.2. Воздействие на коррелятор смеси сигнала и шума

Рассмотрим случай, когда на один вход коррелятора подаётся детерминированный сигнал $s_1(t)$, а на другой вход аддитивная смесь сигнала $s_2(t)$ и белого гауссова шума $\mathbf{n}(t)$ с спектральной плотностью мощности $N(\omega) = \frac{N_0}{2}$:

$$\xi(t) = s_2(t) + \mathbf{n}(t). \quad (5.14)$$

Процесс $\xi(t)$ является гауссовым процессом с математическим ожиданием $M\{\xi(t)\} = s_2(t)$.

Значение на выходе коррелятора является случайной величиной

$$\begin{aligned} R_{\xi s_1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) s_1(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t) s_1(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{n}(t) s_1(t) dt, \end{aligned} \quad (5.15)$$

которая получается линейным преобразованием гауссова процесса, то есть тоже имеет нормальное распределение:

$$w_R(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_R^2}} e^{-\frac{(r-m_R)^2}{\sigma_R^2}}. \quad (5.16)$$

Математическое ожидание рассматриваемой случайной величины – это результат преобразования детерминированной состав-

ляющей процесса на входе

$$m_R = M\{R_{\xi s_1}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t)s_1(t)dt = R_{12}, \quad (5.17)$$

равно коэффициенту корреляции между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Дисперсия случайной величины $R_{\xi s_1}$ определяется случайной составляющей процесса $\xi(t)$:

$$\begin{aligned} \sigma_R^2 &= D\{R_{\xi s_1}\} = M\left\{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} n(t)s_1(t)dt\right)^2\right\} = \\ &= M\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} n(t_1)s_1(t_1)dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} n(t_2)s_1(t_2)dt_2\right\} = \\ &= M\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n(t_1)n(t_2)s_1(t_1)s_1(t_2)dt_1dt_2\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} M\{n(t_1)n(t_2)\}s_1(t_1)s_1(t_2)dt_1dt_2. \end{aligned}$$

Математическое ожидание $M\{n(t_1)n(t_2)\} = \frac{N_0}{2}\delta(t_2 - t_1)$ - представляет собой корреляционную функцию процесса $n(t)$. С учётом этого выражение для дисперсии приведём к виду:

$$\begin{aligned} \sigma_R^2 &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t_2 - t_1) s_1(t_2)dt_2dt_1 = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t_1)s_1(t_1)dt_1 = \frac{N_0 E_1}{2}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

В частном случае, когда на вход коррелятора воздействует только шум $s_2(t) = 0$, для параметров распределения отклика коррелятора из (5.17), (5.18) получим:

$$m_R = 0, \sigma_R^2 = \frac{N_0 E_1}{2}. \quad (5.19)$$

В другом частном случае, когда сигналы совпадают $s_1(t) = s_2(t)$, $E_1 = E_2 = E$:

$$m_R = E, \sigma_R^2 = \frac{N_0 E}{2}. \quad (5.20)$$

5.3. Коэффициент корреляции радиосигналов

Рассмотрим случай сравнения двух радиосигналов:

$$s_1(t, \theta_1) = v_1(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_1(t) + \theta_1), \quad (5.21)$$

$$s_2(t, \theta_2) = v_2(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_2(t) + \theta_2). \quad (5.22)$$

И определим структуру выражения для их коэффициента корреляции. Комплексные огибающие сигналов

$$\dot{v}_1(t, \theta_1) = v_1(t)e^{j\varphi_1(t)}e^{j\theta_1} = \dot{v}_1(t)e^{j\theta_1}, \quad (5.23)$$

$$\dot{v}_2(t, \theta_2) = v_2(t)e^{j\varphi_2(t)}e^{j\theta_2} = \dot{v}_2(t)e^{j\theta_2}, \quad (5.24)$$

где $\dot{v}_1(t) = \dot{v}_1(t, 0)$, $\dot{v}_2(t) = \dot{v}_2(t, 0)$.

Коэффициент корреляции между сигналами

$$\begin{aligned} R_{12}(\theta_1, \theta_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t, \theta_1) s_2(t, \theta_2) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}[\dot{v}_1(t, \theta_1) e^{j\omega_0 t}] \operatorname{Re}[\dot{v}_2(t, \theta_2) e^{j\omega_0 t}] dt. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Представляя действительную часть комплексного числа как

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2}, \quad (5.26)$$

последнее выражение перепишем в виде:

$$\begin{aligned} R_{12}(\theta_1, \theta_2) &= \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{v}_1(t, \theta_1) e^{j\omega_0 t} + \dot{v}_1^*(t, \theta_1) e^{-j\omega_0 t}) (\dot{v}_2(t, \theta_2) e^{j\omega_0 t} + \\ &+ \dot{v}_2^*(t, \theta_2) e^{-j\omega_0 t}) dt = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{v}_1(t, \theta_1) \dot{v}_2(t, \theta_2) e^{2j\omega_0 t} + \\ &+ \dot{v}_1^*(t, \theta_1) \dot{v}_2^*(t, \theta_2) e^{-2j\omega_0 t}) dt + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{v}_1(t, \theta_1) \dot{v}_2^*(t, \theta_2) + \\ &+ \dot{v}_1^*(t, \theta_1) \dot{v}_2(t, \theta_2)) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}(\dot{v}_1(t, \theta_1) \dot{v}_2(t, \theta_2) e^{2j\omega_0 t}) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}(\dot{v}_1(t, \theta_1) \dot{v}_2^*(t, \theta_2)) dt. \end{aligned}$$

Первый интеграл в полученной сумме близок к нулю, как интеграл от быстро осциллирующей функции. Пренебрегая им по сравнению со вторым, выражение для коэффициента корреляции перепишем в виде:

$$\begin{aligned} R_{12}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_1(t, \theta_1) \dot{v}_2^*(t, \theta_2) dt = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{\rho}_{12}(\theta_1, \theta_2), \end{aligned} \quad (5.27)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{12}(\theta_1, \theta_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_1(t, \theta_1) \dot{v}_2^*(t, \theta_2) dt = \\ &= e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_1(t) \dot{v}_2^*(t) dt = \dot{\rho}_{12} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned} \quad (5.28)$$

– коэффициент корреляции комплексных огибающих сигналов,

$$\dot{\rho}_{12} = \dot{\rho}_{12}(0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_1(t) \dot{v}_2^*(t) dt = \rho_{12} e^{j\gamma_{12}} \quad (5.29)$$

– коэффициент корреляции комплексных огибающих при $\theta_1 = \theta_2 = 0$; ρ_{12} , γ_{12} – его модуль и аргумент.

С учётом введённых обозначений (5.27) перепишется в виде

$$R_{12}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \rho_{12} \cos(\gamma_{12} + \theta_1 - \theta_2). \quad (5.30)$$

В частном случае, когда $\dot{v}_1(t) = \dot{v}_2(t)$, то есть сигналы отличаются только начальной фазой несущего колебания, их энергии равны $E_1 = E_2 = E$ и коэффициент корреляции (5.29) равен энергии огибающей сигналов

$$\dot{\rho}_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_1(t) \dot{v}_1^*(t) dt = E_v = 2E, \quad (5.31)$$

является действительной положительной величиной, то есть

$$\gamma_{12} = 0, \rho_{12} = 2E$$

и выражение (5.30) принимает вид

$$R_{12}(\theta_1, \theta_2) = E \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (5.32)$$

Из полученных выражений видно, что при сравнении сигналов со случайной начальной фазой, в силу неопределённости фаз, коэффициент корреляции сигналов также является неопределённым, это делает невозможным непосредственное сравнение рассматриваемых сигналов. Однако, модуль коэффициента корреляции комплексных огибающих

$$\begin{aligned} |\dot{\rho}_{12}(\theta_1, \theta_2)| = \rho_{12} &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_1(t, \theta_1) \dot{v}_2^*(t, \theta_2) dt \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_1(t) \dot{v}_2^*(t) dt \right| \end{aligned} \quad (5.33)$$

не зависит от θ_1 и θ_2 , что указывает на возможность установить степень подобия комплексных огибающих сигналов, то есть в условиях неопределённости начальной фазы сравнение сигналов может осуществляться на основе сравнения их комплексных огибающих.

Определим структуру устройства, на выходе которого может быть получено значение модуля коэффициента корреляции комплексных огибающих. Будем считать, что сигнал

$$s_1(t) = s_1(t, 0) = v_1(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_1(t)) \quad (5.34)$$

является эталонным при сравнении (полностью известен). Поскольку коэффициент корреляции (5.30) зависит от разности начальных фаз сигналов, то без ограничения общности можно положить $\theta_1 = 0$. Выражение для модуля коэффициента корреляции огибающих запишем в виде:

$$\rho_{12} = \sqrt{[Re \dot{\rho}_{12}(0, \theta_2)]^2 + [Im \dot{\rho}_{12}(0, \theta_2)]^2}. \quad (5.35)$$

Как следует из (5.27) действительная часть коэффициента корреляции комплексных огибающих

$$Re \dot{\rho}_{12}(0, \theta_2) = 2R_{12}(0, \theta_2) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t, \theta_2) dt. \quad (5.36)$$

Для определения мнимой части рассмотрим (5.27), (5.28) при $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} R_{12}\left(-\frac{\pi}{2}, \theta_2\right) &= \frac{1}{2} Re \dot{\rho}_{12}\left(-\frac{\pi}{2}, \theta_2\right) = \frac{1}{2} Re \dot{\rho}_{12} e^{-j\theta_2} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} Re(-j \dot{\rho}_{12} e^{-j\theta_2}) = \frac{1}{2} Re(-j \dot{\rho}_{12}(0, \theta_2)) = \frac{1}{2} Im(\dot{\rho}_{12}(0, \theta_2)), \end{aligned}$$

таким образом

$$\begin{aligned} \text{Im} \dot{\rho}_{12}(0, \theta_2) &= 2R_{12} \left(-\frac{\pi}{2}, \theta_2 \right) = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} s_1 \left(t, -\frac{\pi}{2} \right) s_2(t, \theta_2) dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}_1(t) s_2(t, \theta_2) dt, \end{aligned} \quad (5.37)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{s}_1(t) &= s_1 \left(t, -\frac{\pi}{2} \right) = v_1(t) \cos \left(\omega_0 t + \varphi_1(t) - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= v_1(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_1(t)). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Структурная схема коррелятора огибающих, соответствующая (5.35) - (5.38), показана на рис.5.3. Коррелятор огибающих состоит из двух каналов, в каждом из которых находится коррелятор, и нелинейного устройства. Нелинейные блоки, обозначенные $(\cdot)^2$ осуществляют возведение сигнала в квадрат. Блок $\sqrt{(\cdot)}$ соответствует операции извлечения квадратного корня.

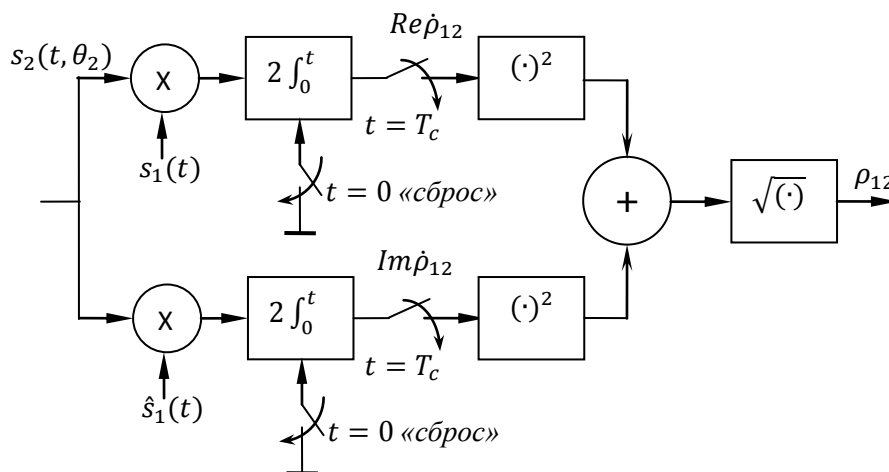


Рис.5.3. Структурная схема коррелятора огибающих

5.4. Воздействие на коррелятор огибающих смеси сигнала и шума

На вход коррелятора огибающих поступает аддитивная смесь радиосигнала и белого гауссова шума $\mathbf{n}(t)$ со спектральной плотностью мощности $\frac{N_0}{2}$:

$$\xi(t) = A s_2(t, \theta_2) + \mathbf{n}(t), \quad (5.39)$$

где $s_2(t, \theta_2)$ определён (5.22); A, θ_2 – параметры. Опорные сигналы коррелятора огибающих даются выражениями (5.21), (5.38).

На выходе интеграторов обоих каналов коррелятора оги-

бающих в момент времени $t = T_c$, будут получены случайные величины

$$X = \text{Re} \dot{p}_{s_1 \xi}(0, \theta_2) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \xi(t) dt, \quad (5.40)$$

$$Y = \text{Im} \dot{p}_{s_1 \xi}(0, \theta_2) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}_1(t) \xi(t) dt, \quad (5.41)$$

которые пропорциональны с коэффициентом 2 реакциями коррелятора сигналов (рис.5.2) и, как отмечено в п.5.2, имеют нормальное распределение:

$$w_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right), \quad (5.42)$$

$$w_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right). \quad (5.43)$$

Математические ожидания рассматриваемых случайных величин на основании (5.17):

$$m_X = 2AR_{s_1 s_2}, \quad m_Y = 2AR_{\hat{s}_1 s_2}. \quad (5.44)$$

Принимая во внимание (5.30) эти выражение перепишем в виде:

$$m_X = A\rho_{12} \cos(\gamma_{12} - \theta_2), \quad m_Y = A\rho_{12} \sin(\gamma_{12} - \theta_2), \quad (5.45)$$

где ρ_{12} и γ_{12} определены (5.29).

Дисперсии величин X и Y на основании (5.18) с учётом свойства дисперсии (3.28) и равенства энергий сигналов $s_1(t)$ и $\hat{s}_1(t)$:

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 2N_0 E_1. \quad (5.46)$$

Определим коэффициент взаимной корреляции случайных величин X и Y .

$$\begin{aligned} R_{XY} &= M\{(X - m_X)(Y - m_Y)\} = \\ &= 4M\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t_1) \mathbf{n}(t_1) dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}_1(t_2) \mathbf{n}(t_2) dt_2\right\} = \\ &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} M\{\mathbf{n}(t_1) \mathbf{n}(t_2)\} s_1(t_1) \hat{s}_1(t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

Опуская выкладки, аналогичные проделанным при получении (5.18), запишем:

$$R_{XY} = 2N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t_1) \hat{s}_1(t_1) dt_1 = 2N_0 R_{s_1 \hat{s}_1}. \quad (5.47)$$

Используя (5.32), приходим к результату

$$R_{XY} = 2N_0 R_{s_1 \hat{s}_1} = 2N_0 E_1 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (5.48)$$

Таким образом, величины X и Y не коррелированы, а, так как они гауссовы, то они и независимы.

Реакция коррелятора огибающих получается нелинейным

преобразование независимых гауссовых случайных величин вида (3.45), которое рассмотрено в п.3.3. ПРВ процесса на выходе коррелятора в соответствии с (3.56):

$$w_{\rho_{s_1\xi}}(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + m^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{m\rho}{\sigma^2}\right), \quad (5.49)$$

$$\text{где } m = \sqrt{m_X^2 + m_Y^2} = A\rho_{12}. \quad (5.49a)$$

Реакция коррелятора огибающих при воздействии аддитивной смеси детерминированного сигнала и шума имеет обобщённое распределение Релея.

Подставив в (5.49) выражения (5.46) и (5.49a) получим

$$w_{\rho_{s_1\xi}}(\rho) = \frac{\rho}{2N_0E_1} \exp\left(-\frac{\rho^2 + A^2\rho_{12}^2}{4N_0E_1}\right) I_0\left(\frac{A\rho_{12}\rho}{2N_0E_1}\right). \quad (5.50)$$

Рассмотрим частные случаи. Заметим, что параметр распределения $\sigma^2 = 2N_0E_1$ определяется только интенсивностью шума и энергией эталонного сигнала.

Если на вход коррелятора огибающих воздействует только шум, то в (5.49a) следует положить $A = 0$, тогда

$$m = 0. \quad (5.51)$$

Для отклика коррелятора огибающих из (5.49), (5.50) получим распределения Релея

$$w_{\rho_{s_1\xi}}(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{\rho}{2N_0E_1} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4N_0E_1}\right). \quad (5.52)$$

В случае, когда на вход коррелятора огибающих воздействует смесь сигнала $s_2(t, \theta_2)$ со случайной начальной фазой и шума, положим в (5.49a) $A = 1$. Поскольку, распределение отклика коррелятора огибающих не зависит от θ_2 , в рассматриваемом случае остаётся в силе (5.49) с параметрами

$$m = \rho_{12}. \quad (5.53)$$

Если дополнительно выполняется условие

$$\dot{v}_1(t) = \dot{v}_2(t), \quad (5.54)$$

то энергии сигналов равны

$$E_1 = E_2 = E, \quad (5.55)$$

и с учётом (5.31) получим

$$m = 2E. \quad (5.56)$$

В случае, когда воздействие на коррелятор огибающих является аддитивной смесью сигнала со случайной амплитудой и начальной фазой и шума, A , входящая в (5.49a), является случайной величиной, распределённой по закону Релея

$$w_A(a) = \frac{a}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_s^2}\right), \quad (5.57)$$

с параметром σ_s^2 .

Выражение (5.49) в этом случае должно рассматриваться как ПРВ отклика коррелятора, полученная при условии, что случайная величина A приняла известное значение $A \geq 0$:

$$\begin{aligned} w_{\rho_{s_1\xi}}(\rho|A) &= \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2+m^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{m\rho}{\sigma^2}\right) = \\ &= \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2+A^2\rho_{12}^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{A\rho_{12}\rho}{\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (5.58)$$

При определении плотности вероятностей отклика коррелятора огибающей используем свойства (3.7), (3.10)

$$\begin{aligned} w_{\rho_{s_1\xi}}(\rho) &= \int_0^{+\infty} w_{\rho_{s_1\xi},A}(\rho, A) dA = \\ &= \int_0^{+\infty} w_{\rho_{s_1\xi}}(\rho|A) w_A(A) dA. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Подставив (5.49) и (5.57) в последнее выражение, получим

$$\begin{aligned} w_{\rho_{s_1\xi}}(\rho) &= \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2+A^2\rho_{12}^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{A\rho_{12}\rho}{\sigma^2}\right) \frac{A}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) dA = \\ &= \frac{\rho}{\sigma^2\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) \int_0^{+\infty} A \exp\left(-\frac{A^2(\sigma_s^2\rho_{12}^2+\sigma^2)}{2\sigma^2\sigma_s^2}\right) I_0\left(\frac{A\rho_{12}\rho}{\sigma^2}\right) dA \end{aligned} \quad (5.60)$$

Обозначив

$$p = \frac{(\sigma_s^2\rho_{12}^2+\sigma^2)}{2\sigma^2\sigma_s^2}, \quad \beta = \frac{\rho_{12}\rho}{\sigma^2}, \quad (5.61)$$

заметим, что интеграл в (5.60) имеет структуру известного табличного интеграла:

$$\int_0^{+\infty} A \exp(-pA^2) I_0(\beta A) dA = \frac{1}{2p} \exp\left(\frac{\beta^2}{4p}\right), \quad p > 0. \quad (5.62)$$

С учётом этого (5.60) продолжим следующим образом

$$w_{\rho_{s_1\xi}}(\rho) = \frac{\rho}{\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma_1^2}\right), \quad (5.63)$$

где $\sigma_1^2 = \sigma_s^2\rho_{12}^2 + \sigma^2$.

Отклик коррелятора огибающих на воздействие в виде аддитивной смеси сигнала со случайной амплитудой и фазой и шума имеет распределение Релея с параметром σ_1^2 , математическим ожиданием и дисперсией

$$m_\rho = \sqrt{\frac{\pi\sigma_1^2}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}(\sigma_s^2\rho_{12}^2 + \sigma^2)}, \quad \sigma_\rho^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma_1^2 \quad (5.64)$$

Если дополнительно выполняется условие (5.54), то с учётом

(5.31) и (5.46), получим

$$\sigma_1^2 = 4\sigma_s^2 E^2 + 2N_0 E = 2E(N_0 + 2E\sigma_s^2). \quad (5.65)$$

5.5. Оценивание неэнергетического параметра детерминированных сигналов. Корреляционная функция сигнала.

Параметр сигнала λ является неэнергетическим, если при его изменении энергия сигнала остаётся постоянной:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t, \lambda_1)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t, \lambda_2)|^2 dt, \lambda_1 \neq \lambda_2. \quad (5.66)$$

К неэнергетическим параметрам сигнала относятся, например, параметр временного запаздывания и смещения частоты.

Сравнение сигналов с параметрами лежит в основе оценивания параметров сигналов. В качестве примера рассмотрим случай, когда параметр сигнала может принимать дискретные значения из множества $\{\lambda_i\}_{i=0}^{N-1}$. Заметим при этом, что при $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, предельный переход $\lambda_{i+1} - \lambda_i \rightarrow 0$ будет соответствовать случаю непрерывного параметра.

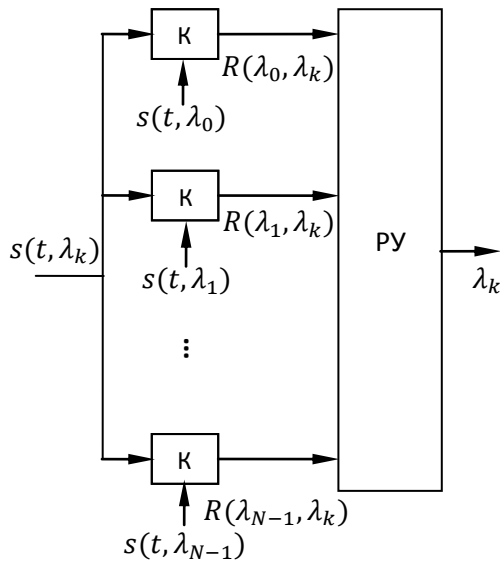


Рис.5.4. Структурная схема оценщика параметра сигнала

При оценивании параметра на вход устройства измерения (измерителя) поступает сигнал $s(t, \lambda_k)$, $\lambda_k \in \{\lambda_i\}_{i=0}^{N-1}$, по результатам обработки которого, измеритель определяет, какое из возможных значений принял параметр сигнала.

Сформируем ансамбль эталонных сигналов, соответствующих каждому значению параметра $\{s_i(t) = s(t, \lambda_i)\}_{i=0}^{N-1}$. Так как энергия рассматриваемого сигнала не зависит от параметра, то получен ансамбль сигналов с одинаковыми

энергиями. При этом измерение параметра сигнала сводится к различению сигналов с одинаковыми энергиями. Действительно, определив, какому из эталонных сигналов соответствует обрабатываемый сигнал, нетрудно определить и значение измеряемого параметра. Структурная схема оценщика на основе устройства

различения сигналов показана на рис.5.4. В качестве сравнивающих устройств используются корреляторы (К), решающее устройство (РУ) принимает решение на основе определения канала с максимальным откликом.

На выходе коррелятора i -го канала по завершению действия сигнала имеем

$$R_{ik} = R(\lambda_i, \lambda_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \lambda_i) s^*(t, \lambda_k) dt. \quad (5.67)$$

Зависимость $R(\lambda_i, \lambda_k)$, когда аргументы рассматриваются как непрерывные, называется автокорреляционной функцией (АКФ) сигнала по параметру или функцией рассогласования по параметру. Обозначив $\Delta\lambda_{ik} = \lambda_i - \lambda_k$, выражение для корреляционной функции перепишем в виде

$$R(\lambda_i, \lambda_i - \Delta\lambda_{ik}) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \lambda_i) s^*(t, \lambda_i - \Delta\lambda_{ik}) dt. \quad (5.68)$$

Корреляционная функция не зависит от конкретного значения λ_i и является функцией только одной переменной

$$R(\Delta\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \lambda) s^*(t, \lambda - \Delta\lambda) dt. \quad (5.69)$$

В соответствии с (5.69), в каждом канале измерителя определяются отсчёты корреляционной функции $R(\Delta\lambda_{ik})$ в точках $\Delta\lambda_{ik}$.

Рассмотрим частные случаи, поясняющие (5.69). Когда рассматривается параметр запаздывания $\lambda \equiv \tau$ сигнала $s(t, \tau) = s(t - \tau)$ и

$$R(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \tau_1) s^*(t, \tau_2) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - \tau_1) s^*(t - \tau_2) dt.$$

Выполняя замену переменных $t' = t - \tau_1$, для временной АКФ получим:

$$\begin{aligned} R(\tau_1, \tau_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t') s^*(t' - \underbrace{(\tau_2 - \tau_1)}_{\Delta\tau}) dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t') s^*(t' - \Delta\tau) dt = R(\Delta\tau). \end{aligned} \quad (5.69a)$$

Когда в качестве параметра рассматривается частотный сдвиг $\lambda \equiv \Omega$ радиосигнала $s(t, \Omega) = v(t) \cos((\omega_0 - \Omega)t + \varphi(t))$, для частотной АКФ получим:

$$\begin{aligned}
 R(\Omega_1, \Omega_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \Omega_1) s(t, \Omega_2) dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} v^2(t) \cos((\omega_0 - \Omega_1)t + \varphi(t)) \cos((\omega_0 - \Omega_2)t + \varphi(t)) dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2(t)}{2} \cos((2\omega_0 - (\Omega_1 + \Omega_2))t + 2\varphi(t)) dt + \\
 &+ \int_0^{T_c} \frac{v^2(t)}{2} \cos(\underbrace{(\Omega_2 - \Omega_1)}_{\Delta\Omega} t) dt \approx \int_0^{T_c} \frac{v^2(t)}{2} \cos(\Delta\Omega t) dt = R(\Delta\Omega). \quad (5.69б)
 \end{aligned}$$

В последней сумме интегралов первым интегралом пренебрегли по сравнению со вторым, как интегралом от быстроосциллирующей функции.

Когда в качестве параметра рассматривается начальная фаза $\lambda \equiv \theta$ радиосигнала $s(t, \theta) = v(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t) + \theta)$, для фазовой АКФ получим:

$$\begin{aligned}
 R(\theta_1, \theta_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \theta_1) s(t, \theta_2) dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} v^2(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t) + \theta_1) \cos(\omega_0 t + \varphi(t) + \theta_2) dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2(t)}{2} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi(t) + \theta_1 + \theta_2) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2(t)}{2} \cos(\theta_2 - \theta_1) dt \approx \\
 &\approx \underbrace{\cos(\theta_2 - \theta_1)}_{\Delta\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2(t)}{2} dt = E \cos(\Delta\theta) = R(\Delta\theta). \quad (5.69в)
 \end{aligned}$$

В последней сумме интегралов первым интегралом пренебрегли по сравнению со вторым, как интегралом от быстроосциллирующей функции. Также было использовано (2.17).

Корреляционная функция определяется корреляционным интегралом, записанным для сигналов с одинаковой энергией, и наследует все свойства коэффициента корреляции (5.4)-(5.13):

$$R(\Delta\lambda) = R^*(-\Delta\lambda), |R(\Delta\lambda)| = |R(-\Delta\lambda)|, \quad (5.70)$$

$$\operatorname{Re} R(\Delta\lambda) \leq E, |R(\Delta\lambda)| \leq E, \quad (5.71)$$

$$R(0) = |R(0)| = E, \quad (5.72)$$

$$R(\Delta\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega, \lambda) S^*(\omega, \lambda - \Delta\lambda) d\omega. \quad (5.73)$$

Обобщением корреляционной функции является взаимная корреляционная функция (ВКФ), которая характеризует подобие различных сигналов с параметрами:

$$R_{12}(\Delta\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t, \lambda) s_2^*(t, \lambda - \Delta\lambda) dt. \quad (5.74)$$

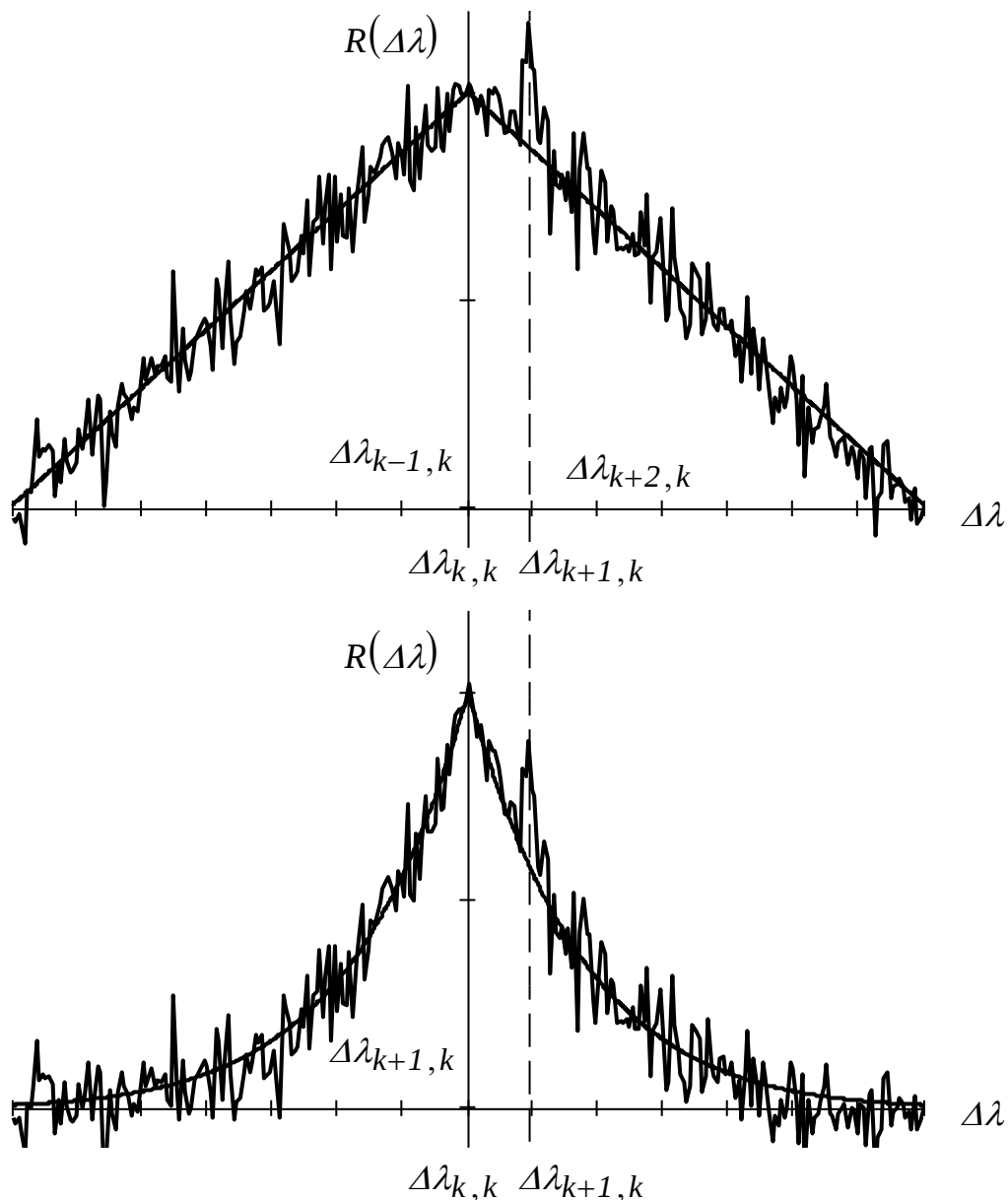


Рис.5.5. Отклик оценителя при воздействии помех

Несмотря на то, что корреляционная функция описывает работу оценителя параметра сигнала, она зависит только от вида сигнала и должна рассматриваться как его характеристика. При отсутствии помех вид корреляционной функции, а значит и вид сигнала, параметр которого измеряется, не влияет на качество

функционирования оценителя. Однако на практике обработка сигнала осуществляется в условиях наличия помех. Рассмотрим влияние помех при измерении параметра сигнала.

Пусть на вход оценителя рис.5.4 поступает аддитивная смесь полезного сигнала и центрированного стационарного шума

$$\begin{aligned}\xi(t) &= s(t, \lambda_k) + \mathbf{n}(t), \\ s(t, \lambda_k) &\in \mathbb{R}, \quad M\{\mathbf{n}(t)\} = 0.\end{aligned}\tag{5.75}$$

На выходе коррелятора i -го канала к моменту окончания сигнала будет получена случайная функция

$$\begin{aligned}R_{s\xi}(\Delta\lambda_{ik}) &= \int_0^{T_c} s(t, \lambda_i)(s(t, \lambda_k) + \mathbf{n}(t))dt = \\ &= \int_0^{T_c} s(t, \lambda_i)s(t, \lambda_k)dt + \int_0^{T_c} s(t, \lambda_i)\mathbf{n}(t)dt = \\ &= R(\Delta\lambda_{ik}) + \int_0^{T_c} s(t, \lambda_i)\mathbf{n}(t)dt\end{aligned}\tag{5.76}$$

со средним значением

$$\begin{aligned}m_R(\Delta\lambda_{ik}) &= M\{R_{s\xi}(\Delta\lambda_{ik})\} = \\ &= M\left\{R(\Delta\lambda_{ik}) + \int_0^{T_c} s(t, \lambda_i)\mathbf{n}(t)dt\right\} = \\ &= R(\Delta\lambda_{ik}) + \int_0^{T_c} s(t, \lambda_i)M\{\mathbf{n}(t)\}dt = R(\Delta\lambda_{ik}).\end{aligned}\tag{5.77}$$

Последнее выражение показывает, что величины, получаемые на выходе корреляторов в каждом из каналов, группируются в среднем около соответствующих отсчётов корреляционной функции. Это иллюстрируется рис.5.5, где показаны графики реализации случайной функции $R_{s\xi}(\Delta\lambda)$ при двух различных видах корреляционной функции $R(\Delta\lambda)$. На верхнем графике влияние помех проявилось в том, что максимальный отклик будет зафиксирован в $i = k + 1$ - м канале измерителя.

Таким образом, имеет ненулевую вероятность событие, когда максимальное значение будет получено в канале, которому соответствует значение параметра отличное от истинного, что приведёт к ошибке оценивания. Как видно из рис.5.5, вероятность такого события тем меньше, чем меньшее значение $R(\Delta\lambda)$ соответствует этому каналу. Поэтому, вероятность ошибки при измерении дискретного параметра в условиях воздействия помех может быть уменьшена путём выбора сигнала, корреляционная функция которого имеет узкий пик в окрестности нулевой абсциссы и быстро спадает вне её

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} R(\min_{i,k} \Delta \lambda_{ik}) &\ll \operatorname{Re} R(0), \\ \text{или} \\ |R(\min_{i,k} \Delta \lambda_{ik})| &\ll |R(0)|. \end{aligned} \quad (5.78)$$

5.6. Измерение параметров нескольких сигналов. Разрешающая способность РТС

При оценивании параметров сигналов могут возникать ситуации, когда на вход измерителя поступают сразу два или более сигналов с различными значениями параметра. Например, при измерении дальности, когда в пространстве присутствуют две близкорасположенные цели, на вход измерителя поступают сразу два отражённых от них сигнала, отличающихся только значением времени запаздывания. В этом случае характеристикой измерителя параметров сигнала является разрешающая способность.

Разрешающей способностью называется способность радиотехнического устройства давать такой суммарный отклик на суперпозицию двух, отличающихся значениями параметра, сигналов, в котором просматриваются два максимума, соответствующие каждому из сигналов. При этом предполагается, что по результатам анализа такого отклика в решающем устройстве могут быть определены параметры каждого из сигналов.

Количественной мерой разрешающей способности является постоянная разрешения $\delta \lambda_{\text{п}}$ – это минимальная разность параметров двух сигналов, при которой могут быть измерены параметры каждого сигнала при их совместном воздействии на измеритель.

Рассматривая идеализированный случай, когда помехи отсутствуют, запишем выражение для сигнала на входе измерителя

$$s_{\text{вх}}(t) = s(t, \lambda_k) + s(t, \lambda_k + \delta \lambda), \quad (5.79)$$

где $\delta \lambda$ – разность параметров обрабатываемых сигналов. В i -м канале измерителя будет получена величина

$$\begin{aligned} R_2(\lambda_k, \delta \lambda, \lambda_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \lambda_i) (s(t, \lambda_k) + s(t, \lambda_k + \delta \lambda)) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \lambda_i) s(t, \lambda_k) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \lambda_i) s(t, \lambda_k + \delta \lambda) dt = \\ &= R(\Delta \lambda_{ik}) + R(\Delta \lambda_{ik} - \delta \lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, измеритель определяет отсчёты функции

$$R_2(\Delta \lambda, \delta \lambda) = R(\Delta \lambda) + R(\Delta \lambda - \delta \lambda) \quad (5.80)$$

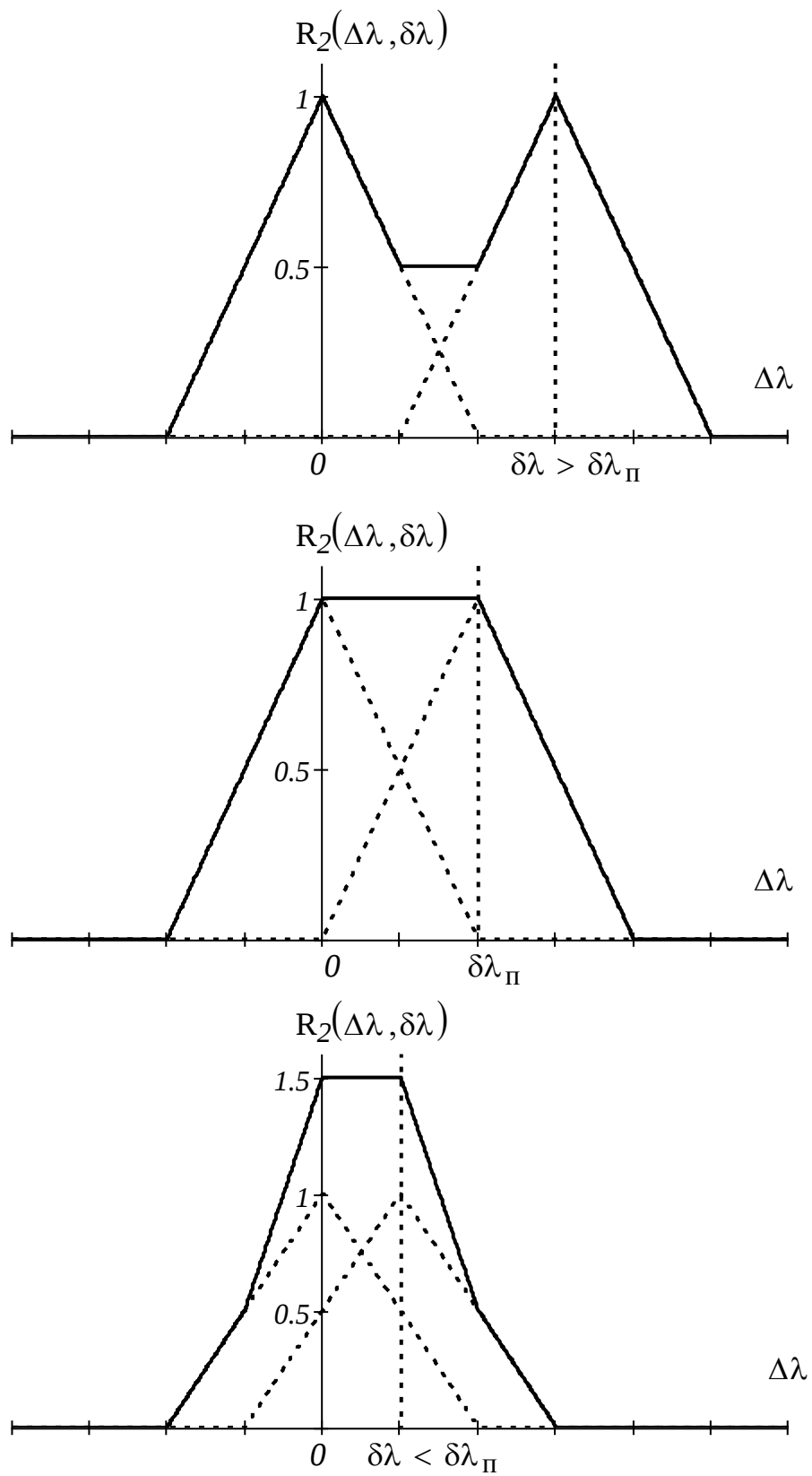


Рис.5.6. Отклик оценщика при обработке сигналов двух целей

в точках $\Delta\lambda = \Delta\lambda_{ik}$.

Последнее выражение показывает, что формирование значений $R_2(\Delta\lambda, \delta\lambda)$ происходит путём сложения функции корреляции сигнала и её копии, смещённой на величину разности параметров обрабатываемых сигналов $\delta\lambda$.

На рис.5.6 в качестве примера сплошной линией показаны графики $R_2(\Delta\lambda, \delta\lambda)$, соответствующие различным значениям $\delta\lambda$ при оценивании времени запаздывания прямоугольного импульса. Графики функций $R(\Delta\lambda)$ и $R(\Delta\lambda - \delta\lambda)$ на рисунке показаны пунктиром.

Из рисунков видно, что отклик оценщика описывается функцией, график которой содержит два максимума, соответствующие каждому из сигналов, только когда разность параметров сигнала превышает некоторое пороговое значение $\delta\lambda > \delta\lambda_{\text{п}}$. Величина $\delta\lambda_{\text{п}}$ является постоянной разрешения по параметру и, как видно из рис.5.6, определяется шириной корреляционной функции. Ширину корреляционной функции обычно определяют по уровню 0.5 от её максимального значения $R(\delta\lambda_{\text{п}}) = 0.5R(0)$.

Возможны и другие подходы к определению ширины корреляционной функции.

Постоянная разрешения, таким образом, определяется видом корреляционной функции, а значит и видом сигналов, используемых при оценке параметров. Чем уже корреляционная функция сигнала, тем меньше постоянная разрешения и тем выше разрешающая способность системы. Поэтому предпочтительно использовать сигналы, корреляционная функция которых имеет малую ширину - удовлетворяет сформулированным выше требованиям (5.78).

5.7. Временные корреляционные функции сигналов

Временные корреляционные функции характеризуют отклик оценщика при оценке параметра временного запаздывания сигнала.

Сигналы с параметрами временного запаздывания описываются выражениями:

$$s_1(t, \tau_1) = s_1(t - \tau_1), \quad (5.81)$$

$$s_2(t, \tau_2) = s_2(t - \tau_2). \quad (5.82)$$

Коэффициент корреляции этих сигналов определяется корреляционным интегралом

$$R_{12}(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t, \tau_1) s_2^*(t, \tau_2) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t - \tau_1) s_2^*(t - \tau_2) dt.$$

Сделав замену переменной в последнем интеграле $t' = t - \tau_1$ и обозначив разность параметров сигналов $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$, запишем

$$R_{12}(\tau_1, \tau_2) = R_{12}(\Delta\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t') s_2^*(t' - \Delta\tau) dt'. \quad (5.83)$$

Полученное выражение определяет зависимость коэффициента корреляции сигналов от разности их параметров временного запаздывания и называется временной взаимной корреляционной функцией сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

В частном случае, когда $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$, (5.83) определяет временную автокорреляционную функцию сигнала:

$$R(\Delta\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) s^*(t - \Delta\tau) dt. \quad (5.84)$$

Основные свойства автокорреляционной функции даются выражениями (5.70)-(5.73) при $\Delta\lambda \equiv \Delta\tau$.

5.8. Корреляционные функции радиосигналов

При обработке радиосигналов со случайными начальными фазами их сравнение осуществляется без учёта начальных фаз на основе анализа модуля коэффициента корреляции комплексных огибающих. Сигналы с параметрами частотного смещения и временного запаздывания описываются выражениями

$$s_1(t, \Omega_1, \tau_1) = v_1(t - \tau_1) \cos [(\omega_0 - \Omega_1)(t - \tau_1) + \varphi_1(t - \tau_1) + \theta_1], \quad (5.85)$$

$$s_2(t, \Omega_2, \tau_2) = v_2(t - \tau_2) \cos [(\omega_0 - \Omega_2)(t - \tau_2) + \varphi_1(t - \tau_2) + \theta_2]. \quad (5.86)$$

Запишем выражение для комплексной огибающей первого сигнала

$$\dot{v}_1(t, \Omega_1, \tau_1) = v_1(t - \tau_1) e^{j\varphi_1(t - \tau_1)} e^{-j\Omega_1 t} e^{j((\Omega_1 - \omega_0)\tau_1 + \theta_1)}. \quad (5.87)$$

Поскольку в рассматриваемом случае значение начальной фазы может быть произвольным, обозначим $\alpha_1 = (\Omega_1 - \omega_0)\tau_1 + \theta_1$. Введённый параметр также является произвольным, позднее ему может быть назначено любое значение. Тогда

$$\dot{v}_1(t, \Omega_1, \tau_1) = \dot{v}_1(t - \tau_1) e^{-j\Omega_1 t} e^{j\alpha_1}, \quad (5.88)$$

где $\dot{v}_1(t) = \dot{v}_1(t, 0, 0) = v_1(t) e^{j\varphi_1(t)}$ - комплексная огибающая

первого сигнала при нулевом значении параметров.

Аналогично для второго сигнала запишем

$$\dot{v}_2(t, \Omega_2, \tau_2) = \dot{v}_2(t - \tau_2) e^{-j\Omega_2 t}, \quad (5.89)$$

где $\dot{v}_2(t) = \dot{v}_2(t, 0, 0) = v_2(t) e^{j\varphi_2(t)}$, $\alpha_2 = 0$.

Рассмотрим коэффициент корреляции комплексных огибающих рассматриваемых сигналов

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{12}(\Omega_1, \tau_1; \Omega_2, \tau_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_1(t, \Omega_1, \tau_1) \dot{v}_2^*(t, \Omega_2, \tau_2) dt = \\ &= e^{j\alpha_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_1(t - \tau_1) e^{-j\Omega_1 t} \dot{v}_2^*(t - \tau_2) e^{j\Omega_2 t} dt = \\ &= e^{j\alpha_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_1(t - \tau_1) \dot{v}_2^*(t - \tau_2) e^{j(\Omega_2 - \Omega_1)t} dt. \end{aligned}$$

Обозначив $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ - разность параметров частотного смещения, $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ - разность параметров временного запаздывания сигналов, выбирая $\alpha_1 = -(\Omega_2 - \Omega_1)\tau_1$ последнее выражение перепишем в виде:

$$\dot{\rho}_{12}(\Delta\Omega, \Delta\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_1(t) \dot{v}_2^*(t - \Delta\tau) e^{j\Delta\Omega t} dt. \quad (5.90)$$

Полученное выражение определяет зависимость коэффициента корреляции комплексных огибающих сигналов от разности параметров частотного смещения и временного запаздывания и называется частотно-временной взаимной корреляционной функцией сигналов. Свойства (5.90) непосредственно следуют из свойств коэффициента корреляции.

В случае, когда рассматривается обработка одинаковых по форме сигналов, то есть $\dot{v}_1(t) = \dot{v}_2(t) = \dot{v}(t)$ выражение (5.90) определяет частотно-временную автокорреляционную функцию сигнала

$$\dot{\rho}(\Delta\Omega, \Delta\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t) \dot{v}^*(t - \Delta\tau) e^{j\Delta\Omega t} dt. \quad (5.91)$$

С учётом свойств коэффициента корреляции (5.4)-(5.13), запишем основные свойства частотно-временной автокорреляционной функции:

$$\dot{\rho}(-\Delta\Omega, -\Delta\tau) = \dot{\rho}^*(\Delta\Omega, \Delta\tau), \quad \rho(-\Delta\Omega, -\Delta\tau) = \rho(\Delta\Omega, \Delta\tau), \quad (5.92)$$

$$\rho(\Delta\Omega, \Delta\tau) \leq E_v, \quad \operatorname{Re} \dot{\rho}(\Delta\Omega, \Delta\tau) \leq E_v, \quad (5.93)$$

$$\dot{\rho}(0, 0) = E_v = 2E, \quad (5.94)$$

$$\dot{\rho}(\Delta\Omega, \Delta\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{V}(\omega - \Delta\Omega) \dot{V}^*(\omega) e^{-j\omega\Delta\tau} d\omega. \quad (5.95)$$

Последнее свойство (5.95) легко получить с учётом равенства Парсеваля (5.8), введя в рассмотрение сигналы $f_1(t) = \dot{v}(t) e^{j\Delta\Omega t}$ со спектральной плотностью $F_1(\omega) = \dot{V}(\omega - \Delta\Omega)$ и $f_2(t) =$

$\dot{v}(t - \Delta\tau)$ со спектральной плотностью $F_2(\omega) = \dot{V}(\omega)e^{j\omega\Delta\tau}$.

В частном случае, когда смещение частоты отсутствует $\Delta\Omega = 0$, выражение (5.90) определяет взаимную корреляционную функцию по времени комплексных огибающих сигналов, а (5.91) – автокорреляционную функцию

$$\dot{\rho}_{12}(\Delta\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_1(t) \dot{v}_2^*(t - \Delta\tau) dt, \quad (5.96)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(\Delta\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t) \dot{v}^*(t - \Delta\tau) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{V}(\omega)|^2 e^{-j\omega\Delta\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (5.97)$$

В другом частном случае, когда $\Delta\tau = 0$, выражения (5.90) и (5.91) определяют взаимную и автокорреляционную функции по частоте комплексных огибающих сигналов

$$\dot{\rho}_{12}(\Delta\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}_1(t) \dot{v}_2^*(t) e^{j\Delta\Omega t} dt, \quad (5.98)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(\Delta\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t) \dot{v}^*(t) e^{j\Delta\Omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{V}(\omega - \Delta\Omega) \dot{V}^*(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Свойства временных и частотных корреляционных функций легко устанавливаются, как частные случаи (5.92)-(5.95).

Модуль частотной автокорреляционной функции определяет отклик измерителя при оценке смещения частоты, временной – при оценке времени запаздывания сигнала. Как отмечалось выше с точки зрения повышения точности оценивания параметров и разрешающей способности желательно использовать сигналы, корреляционная функция которых имеет узкий пик в окрестности нулевой абсциссы и резко спадает вне её.

Ширина модуля временной корреляционной функции определяет постоянную разрешения по времени запаздывания $\delta\tau_{\text{п}}$. Как следует из (5.95), временная корреляционная функция связана через преобразование Фурье со спектральной плотностью энергии сигнала:

$$\rho(\Delta\tau) = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{V}(\omega)|^2 e^{j\omega\Delta\tau} d\omega \right|. \quad (5.100)$$

В силу свойства изменения масштаба времени преобразования Фурье (5 в табл.2.2), это означает, что чем больше ширина спектра сигнала, тем уже график модуля его автокорреляционной функции по времени запаздывания. То есть для улучшения разрешения по времени запаздывания желательно увеличивать ширину спектра сигнала.

Ширина модуля частотной корреляционной функции определяет постоянную разрешения по частоте смещения $\delta\Omega_{\Pi}$. Модуль корреляционной функции по частоте связан через преобразование Фурье с квадратом модуля комплексной огибающей сигнала:

$$\rho(\Delta\Omega) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{v}(t)|^2 e^{-j\Delta\Omega t} dt \right|. \quad (5.101)$$

В силу свойства изменения масштаба времени преобразования Фурье (5 в табл.2.2), это означает, что чем больше длительность сигнала, тем уже график модуля его автокорреляционной функции по частоте. То есть для улучшения разрешения по частоте желательно увеличивать длительность сигнала.

При совместной оценке параметров временного запаздывания и частотного смещения выбор сигнала должен осуществляться из двух противоречивых требований: с одной стороны длительность сигнала желательно увеличить, с другой стороны – ширину спектра. Но, как известно из анализа свойства изменения масштаба времени преобразования Фурье (5 в табл.2.2), увеличение длительности сигнала приводит к уменьшению ширины его спектра и наоборот. При этом для каждого вида сигнала произведение этих параметров остаётся постоянным и определяет базу сигнала

$$B = \Delta f \tau_{\Pi}. \quad (5.102)$$

Поэтому, для повышения точности оценивания параметров и разрешающей способности РТС, желательно использовать сигналы с большим значением базы.

При совместном оценивании времени запаздывания и частотного смещения отклик измерителя описывается модулем частотно-временной корреляционной функции. С точки зрения повышения разрешающей способности и точности оценивания параметров желательно использовать такие сигналы, модуль частотно-временной корреляционной функции которых описывает поверхность с узким центральным пиком в окрестности начала системы координат и резко спадает вне её.

Как будет показано ниже, потенциальная точность совместного оценивания параметров временного запаздывания и частотного сдвига определяется квадратом модуля частотно-временной корреляционной функции $\rho^2(\Delta\Omega, \Delta\tau)$, соответственно точности

оценивания временного запаздывания и частотного сдвига по отдельности определяются её сечениями $\rho^2(\Delta\tau)$ и $\rho^2(\Delta\Omega)$. Квадрат модуля частотно-временной корреляционной функции называется функцией неопределённости, а тело, ограниченное поверхностью $\rho^2(\Delta\Omega, \Delta\tau)$ и плоскостью $\Delta\Omega=0, \Delta\tau=0$ в пространстве $(\rho^2, \Delta\Omega, \Delta\tau)$ – телом неопределённости.

Определим объём тела неопределённости:

$$\begin{aligned} V &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \rho^2(\Delta\Omega, \Delta\tau) d\Delta\Omega d\Delta\tau = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \rho(\Delta\Omega, \Delta\tau) \rho^*(\Delta\Omega, \Delta\tau) d\Delta\Omega d\Delta\tau = \\ &= \int \iiint_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t_1) \dot{v}^*(t_1 - \Delta\tau) e^{j\Delta\Omega t_1} \dot{v}^*(t_2) \dot{v}(t_2 - \Delta\tau) e^{-j\Delta\Omega t_2} dt_1 dt_2 d\Delta\Omega d\Delta\tau = \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t_1) \dot{v}^*(t_1 - \Delta\tau) \dot{v}^*(t_2) \dot{v}(t_2 - \Delta\tau) dt_1 dt_2 d\Delta\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\Delta\Omega(t_1 - t_2)} d\Delta\Omega. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\Delta\Omega(t_1 - t_2)} d\Delta\Omega = 2\pi\delta(t_1 - t_2)$, последнее выражение продолжим в виде:

$$V = 2\pi \iiint_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t_1) \dot{v}^*(t_1 - \Delta\tau) \dot{v}^*(t_2) \dot{v}(t_2 - \Delta\tau) \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 d\Delta\tau.$$

Используя фильтрующее свойство δ -функции, запишем:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \iint_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t_2) \dot{v}^*(t_2 - \Delta\tau) \dot{v}^*(t_2) \dot{v}(t_2 - \Delta\tau) dt_2 d\Delta\tau = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t_2) \dot{v}^*(t_2) dt_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t_2 - \Delta\tau) \dot{v}^*(t_2 - \Delta\tau) d\Delta\tau. \end{aligned}$$

Первый интеграл в полученном произведении определяет энергию комплексной огибающей

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t_2) \dot{v}^*(t_2) dt_2 = \rho(0,0).$$

Сделав замену переменной $x = t_2 - \Delta\tau$, второй интеграл приведём к виду

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t_2 - \Delta\tau) \dot{v}^*(t_2 - \Delta\tau) d\Delta\tau &= - \int_{+\infty}^{-\infty} \dot{v}(x) \dot{v}^*(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(x) \dot{v}^*(x) dx = \rho(0,0). \end{aligned}$$

Таким образом, для тела неопределённости выполняется свойство инвариантности объёма:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \rho^2(\Delta\Omega, \Delta\tau) d\Delta\Omega d\Delta\tau = 2\pi\rho^2(0,0), \quad (5.103)$$

которое означает, что для всех сигналов с одинаковой энергией объём тела неопределённости один и тот же, и изменение формы сигнала может приводить лишь к таким трансформациям тела неопределённости, при которых объём не изменяется.

Функция неопределённости достигает своего максимального значения, равного квадрату энергии комплексной огибающей сигнала, в нуле. И уменьшение объёма тела неопределённости при неизменной энергии сигнала способствовало бы формированию функции неопределённости с узким центральным пиком, однако свойство инвариантности объёма принципиально исключает такую возможность, утверждая, что уменьшение объёма тела неопределённости возможно лишь путём уменьшения энергии сигнала. Желаемый вид тела неопределённости может быть получен лишь путём выбора формы сигнала.

Примеры функций неопределённости различных видов сигналов будут рассмотрены далее.

[Главная страница](#)

